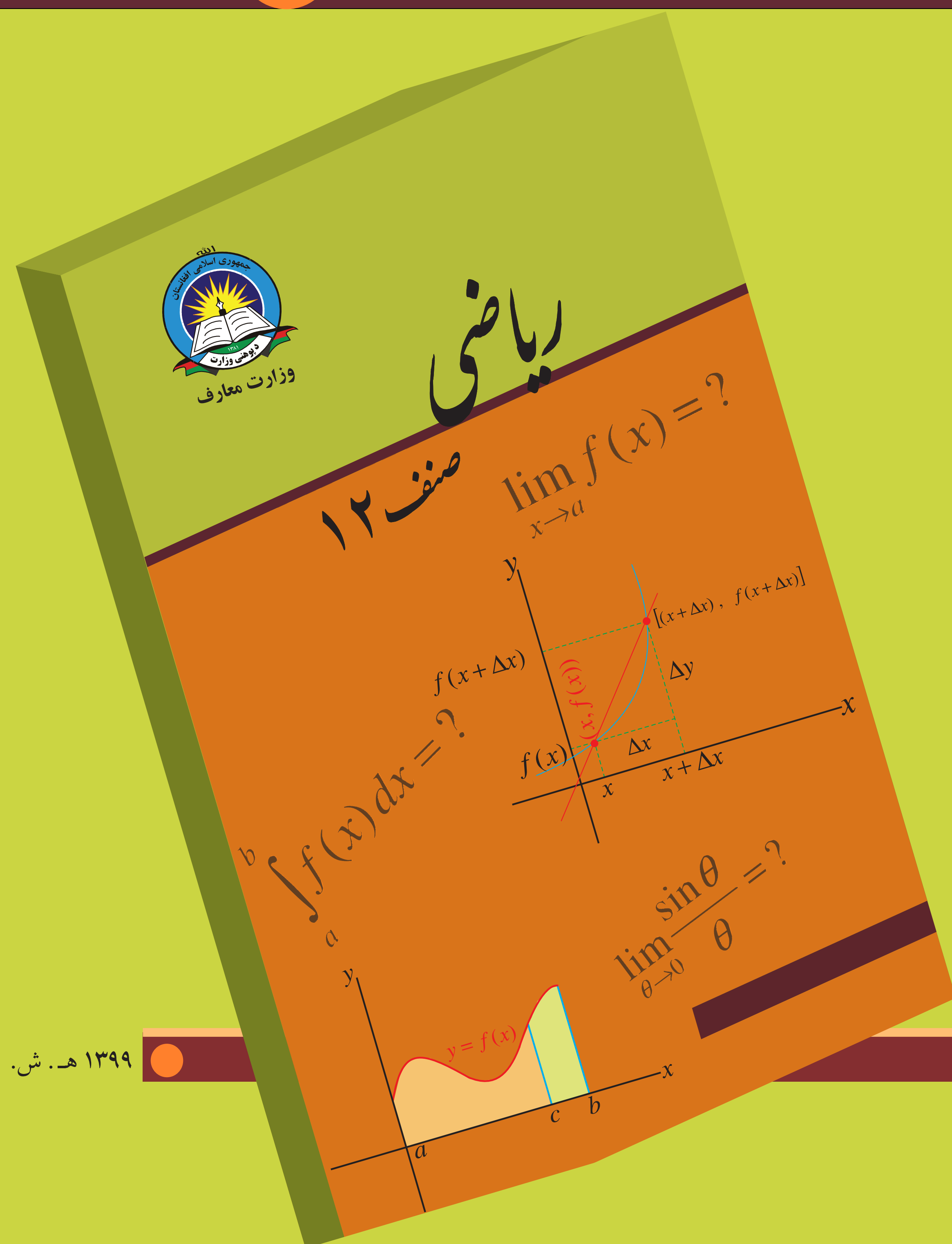
وزارت معارف

رهنمای معلم ریاضی

صنف ۱۲



رهنمای معلم ریاضی - صنف ۱۲

۱۳۹۹ هـ. ش.



سرود ملی

دا وطن افغانستان دی
کور د سولې کور د تورې
دا وطن د ټولو کور دی
د پښتون او هزاره وو
ورسره عرب، گوجر دي
براهوي دي، قزلباش دي
دا هېواد به تل ځلیږي
په سینه کې د آسیا به
نوم د حق مو دی رهبر

دا عزت د هر افغان دی
هر بچی یې قهرمان دی
د بلوڅو د ازبکو
د ترکمنو د تاجکو
پامیریان، نورستانیان
هم ایماق، هم پشه یان
لکه لمر پر شنه آسمان
لکه زړه وي جاویدان
وایو الله اکبر وایو الله اکبر

بسم الله الرحمن الرحیم



رهنمای معلم

ریاضی

صنف ۱۲

سال چاپ: ۱۳۹۹ هـ. ش

مشخصات کتاب

مضمون: رهنمای تدریس ریاضی

مؤلفان: گروه مؤلفان کتاب‌های درسی دیپارتمنت ریاضی

ویراستاران: اعضای دیپارتمنت ویراستاری و ایدیت زبان دری

صنف: دوازدهم

زبان: دری

انکشاف دهنده: ریاست عمومی انکشاف نصاب تعلیمی و تألیف کتب درسی

ناشر: ریاست ارتباط و آگاهی عامۀ وزارت معارف

سال چاپ: 1399 هجری شمسی

ایمیل آدرس: curriculum@moe.gov.af

پیام وزیر معارف

اقرأ باسم ربک

سپاس و حمد بیکران آفریدگار یکتایی را که بر ما هستی بخشید و ما را از نعمت بزرگ خواندن و نوشتن برخوردار ساخت، و درود بی‌پایان بر رسول خاتم- حضرت محمد مصطفی ﷺ که نخستین پیام الهی بر ایشان «خواندن» است.

چنانچه بر همه‌گان هویداست، سال ۱۳۹۷ خورشیدی، به نام سال معارف مسمی گردید. بدین ملحوظ نظام تعلیم و تربیت در کشور عزیز ما شاهد تحولات و تغییرات بنیادینی در عرصه‌های مختلف خواهد بود؛ معلم، متعلم، کتاب، مکتب، اداره و شوراهای والدین، از عناصر شش‌گانه و اساسی نظام معارف افغانستان به شمار می‌روند که در توسعه و انکشاف آموزش و پرورش کشور نقش مهمی را ایفا می‌نمایند. در چنین برهه سرنوشت‌ساز، رهبری و خانوادهٔ بزرگ معارف افغانستان، متعهد به ایجاد تحول بنیادی در روند رشد و توسعه نظام معاصر تعلیم و تربیت کشور می‌باشد.

از همین‌رو، اصلاح و انکشاف نصاب تعلیمی از اولویت‌های مهم وزارت معارف پنداشته می‌شود. در همین راستا، توجه به کیفیت، محتوا و فرایند توزیع کتاب‌های درسی و رهنمای تدریس در مکاتب، مدارس و سایر نهادهای تعلیمی دولتی و خصوصی در صدر برنامه‌های وزارت معارف قرار دارد. ما باور داریم، بدون داشتن کتاب درسی باکیفیت، به اهداف پایدار تعلیمی در کشور دست نخواهیم یافت.

برای دستیابی به اهداف ذکرشده و نیل به یک نظام آموزشی کارآمد، از آموزگاران و مدرسان دلسوز و مدیران فرهیخته به‌عنوان تربیت کننده‌گان نسل آینده، در سراسر کشور احترامانه تقاضا می‌گردد تا در روند آموزش این کتاب درسی و انتقال محتوای آن به فرزندان عزیز ما، با استفاده از این رهنما، از هیچ نوع تلاشی دریغ نورزیده و در تربیت و پرورش نسل فعال و آگاه با ارزش‌های دینی، ملی و تفکر انتقادی بکوشند. هر روز علاوه بر تجدید تعهد و حس مسؤولیت پذیری، با این نیت تدریس راآغاز کنند، که در آیندهٔ نزدیک شاگردان عزیز، شهروندان مؤثر، متمدن و معماران افغانستان توسعه یافته و شکوفا خواهند شد.

همچنین از دانش آموزان خوب و دوست داشتنی به مثابه ارزشمندترین سرمایه‌های فردای کشور می‌خواهم تا از فرصت‌ها غافل نبوده و در کمال ادب، احترام و البته کنجکاوی علمی از درس معلمان گرامی استفادهٔ بهتر کنند و خوشه چین دانش و علم استادان گرامی خود باشند.

در پایان، از تمام کارشناسان آموزشی، دانشمندان تعلیم و تربیت و همکاران فنی بخش نصاب تعلیمی کشور که در تهیه و تدوین این رهنمای تدریس مجدانه شبانه روز تلاش نمودند، ابراز قدردانی کرده و از بارگاه الهی برای آن‌ها در این راه مقدس و انسان‌ساز موفقیت استدعا دارم.

با آرزوی دستیابی به یک نظام معارف معیاری و توسعه یافته، و نیل به یک افغانستان آباد و مترقی دارای شهروندان آزاد، آگاه و مرفه.

دکتور محمد میرویس بلخی

وزیر معارف

فهرست

عنوان **صفحه**

فصل اول لیمیت

فصل دوم مشتق

فصل هشتم احتمالات

سخنی چند به معلم

معلم محترم!

کتاب رهنمای معلم ریاضی که به اساس روش آموزش فعال تألیف گردیده است صرف برای استفادهٔ شما بوده به دسترس شاگردان نباید قرار داده شود.

برای تدریس هرچه بهتر درس و آموزش شاگردان نکات زیر را مورد توجه قرار دهید:

1) به مجرد داخل شدن به صنف بعد از گفتن السلام وعلیکم و گرفتن جواب(علیکم السلام) از طرف شاگردان، به اجرای فعالیت های مقدماتی چون(احوالپرسی، تنظیم صنف، گرفتن حاضری، ملاحظه کارخانه گی و ارزیابی درس گذشته و درصورت امکان درس جدید را با درس گذشته ارتباط داده به تدریس درس جدید اقدام نمایید، آن هم طوری که از بخش مقدماتی سؤالهای مطرح کنید تا شاگردان تفکر نمایند و جواب بدهند، در غیر آن خود به توضیح آن بخش بپردازید.

2) مواد ممد درسی(مواد محیطی که در محیط شما پیدا می شود) که در رهنما از آنها تذکر به عمل آمده رفته اند از قبل تهیه وبه صنف بیاورید.

3) در این رهنما میتود هایی آموزش فعال به کار گرفته شده است که علاوه بر آنها میتواند از میتود های سود مندی که خود در طول تجربه وتدریس تان فراگرفته اید کار بگیرید.

4) در این کتاب مراحل تدریس به شکل علمی آن درنظر گرفته شده است. اگر تطبیق آن مراحل،عملی شود به یقین که تدریس شما سود مند واقع می شود.

5) در موضوعی که تدریس مینمایید تاحد امکان سعی به عمل آمده است تا برای هر درس، معلومات اضافی تهیه گردد که استفاده از آن در هنگام تدریس خالی از مفاد نیست.

6) یک ساعت 45 دقیقه یی طوری تقسیم گردیده است تا بتوانید در اوقات معینه تدریس تان را به پیش ببرید و اختتام بخشید؛ اگر احیاناً در کدام درس این زمانبندی عملی نشده، خود صلاحیت کم ویا زیاد کردن وقت را دارید؛ طور مثال: اگر فعالیت جریان درس که درمدت 28 دقیقه از طرف مؤلفان درنظر گرفته شده است اگر از نظر شما زیاد است می توانید آن را 20 دقیقه درنظر گرفته انجام دهید و از 8 دقیقهٔ اضافی آن در اجرای متباقی فعالیت ها استفاده کنید و امثال آن.

7) سهیم ساختن شاگردان در اجرای فعالیت از اولویت کاری شما درجریان تدریس می باشد که باید شاگردان را به اجرای فعالیت‌ها طور عادلانه سهم بدهید. صرف اجرای فعالیت‌ها را توسط چند شاگرد لایق به پیش ببرید.

8) تمرین ها باید درصنف باسهم گیری شاگردان کارشود.

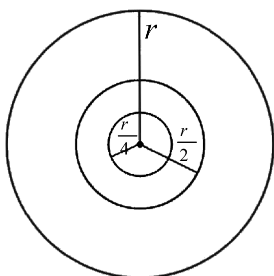
9) درصورتی که تعداد سؤالها دریک تمرین زیاد باشد یکتعداد آن برای تحکیم درس با اشتراک فعال شاگردان درصنف حل شود ومتباقی به حیث کار خانه گی به شاگردان وظیفهٔ داده شود.

10) در اخیر هر فصل تمرین مربوط فصل جا داده شده است، سعی شود تا نظر به مشکل بودن و یا آسان بودن سؤالها، سؤالهای تمرین فصل را در دوساعت، سه ساعت ویا چهار ساعت درسی نظر به لزوم دید تان باسهم گیری شاگردان حل کنید.

11) در کتاب درسی ریاضی ممکن بعضی اشتباهات طباعتی مو جود باشد و نمیتوان الی فرارسیدن تجدیدنظر به اصلاح آن پرداخت، لیکن آن اشتباهات در نوشتن کتاب رهنمای معلم ریاضی در نظر گرفته شده است، معلمان محترم میتوانند به رویت کتاب رهنما اشتباهات را مرفوع سازند.

12) در فصل احصائیه یک تعداد سؤالها مربوط پروگرام صنف دوازدهم نیست؛ بنا بر آن از حل آنها صرف نظر گردید.

ومن الله توفیق



فصل اول

عنوان درس: مفهوم لیمیت

صفحهٔ کتاب (5 - 3)

وقت تدریس(دو ساعت درسی) ساعت اول درسی

اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	• شاگردان مفهوم لیمیت را به کمک ترادف‌ها بفهمند. • شاگردان سؤال‌ها و مثال‌های مربوط به موضوع تقرب ترادف‌ها را به یک عدد حل کرده بتوانند. • شاگردان به حل سؤال‌ها و مثال‌های مربوط به موضوع تقرب ترادف‌ها به یک عدد علاقه‌مندی پیدا نمایند.
روش های تدریس	سؤال و جواب، کارهای گروهی و انفرادی
مواد ممد درسی	چارت بخش ورودی
توضیح ورودی (5) دقیقه	بعداز داخل شدن به صنف و انجام*(کارهای مقدماتی) تدریس؛ مانند:(سلام، احوالپرسی، تنظیم صنف، گرفتن حاضری، ملاحظهٔ کارخانه‌گی، ارزیابی مختصر درس گذشته و ارتباط درس گذشته با درس جدید)که ضروری اند به ارائهٔ درس جدید بپردازید؛ طوری که چارت شکل ورودی را در مقابل صنف آویزان نموده سؤال مربوطهٔ آن را از شاگردان بپرسید، شاگردان را تشویق و رهنمایی نمایید تا جواب های درست را ارائه نمایند و درغیر آن میتوانید چنین تشریحات لازم را ارائه نمایید: از شکل معلوم میگردد که اولاً شعاع r به 2 واحد تقسیم شده ، سپس به 4 واحد تقسیم شده و اگر این عملیه را ادامه دهیم، یعنی $\frac{r}{n^2}$ شکل یک ترادف را تشکیل میدهد؛ طوری‌که $n \in N$ ؛ $n = 2,4,6,8,...$ و این ترادف به نقطهٔ صفر تقرب میکند.

فعالیت جریان درس: (28) دقیقه

شاگردان را به گروه های مناسب تقسیم نموده و آنها را وظیفه دهید تا فعالیت صفحهٔ سوم کتاب درسی را انجام دهند. طوری‌که هر دو ترادف داده شدهٔ فعالیت را به دست آورده و نقاط $a_1, a_2, a_3, a_1^*, a_2^*, a_3^*$ ترادف‌ها را روی محور اعداد نشان دهند. در وقت نظارت از گروه‌ها، شاگردان را رهنمایی نمایید و آنها را تشویق نمایید تا در گروه های شان سهم فعال داشته باشند. در اخیر فعالیت از نمایندهٔ یک گروه بخواهید تا فعالیت انجام شدهٔ گروه خویش را روی تخته توضیح و تشریح نماید؛ اگر فعالیت درست اجرا گردیده بود از گروه‌ها بخواهید تا فعالیت های گروهی

---

* بعد از این در هر جایی که(کارهای مقدماتی) ذکر می‌گردد مقصد از آن:(سلام، احوالپرسی، تنظیم صنف، گرفتن حاضری، ملاحظهٔ کارخانه‌گی، ارزیابی مختصر درس گذشته و ارتباط درس گذشته با درس جدید) است.

خویش را با حل روی تخته مقایسه نمایند اگر کدام اشتباهی در کار ایشان موجود باشد به اصلاح آن بپردازند؛ سپس نتیجهٔ این فعالیت را باسهیم ساختن شاگردان به شکل سؤال و جواب روی تخته توضیح و تشریح نمایید. در اخیر جزء(i) مثال صفحهٔ چهارم کتاب درسی را با سهم فعال شاگردان روی تخته حل نمایید.

تحکیم درس: (7) دقیقه

برای تحکیم درس جزءء(ii) مثال صفحهٔ 4 کتاب درسی را توسط یک شاگرد داوطلب روی تخته حل نموده و همزمان به شاگردان دیگر وظیفه دهید تا آن را در کتابچه‌های شان به شکل انفرادی حل نمایند. زمانی که مطمئن شدید سؤال حل شدهٔ روی تخته کاملاً درست است از همه شاگردان بخواهید تا سؤال حل شدهٔ کتابچه‌های شان را با سؤال حل شدهٔ روی تخته مقایسه نمایند تا اگر کدام اشتباهی در حل ایشان باشد باید آن را اصلاح نمایند.
(توجه داشته باشید که شاگردان در جریان کار انفرادی از سؤال حل شدهٔ کتاب استفاده ننمایند.)

ارزیابی ختم درس: (5) دقیقه

معلم محترم برای این که مطمئن شوید آیا شاگردان درس ارائه شده را خوب فرا گرفته اند یا خیر؟ از یک شاگرد بخواهید تا جزء(iii) مثال صفحهٔ 4 کتاب درسی را روی تخته با سهم گیری فعال شاگردان دیگر حل نماید.

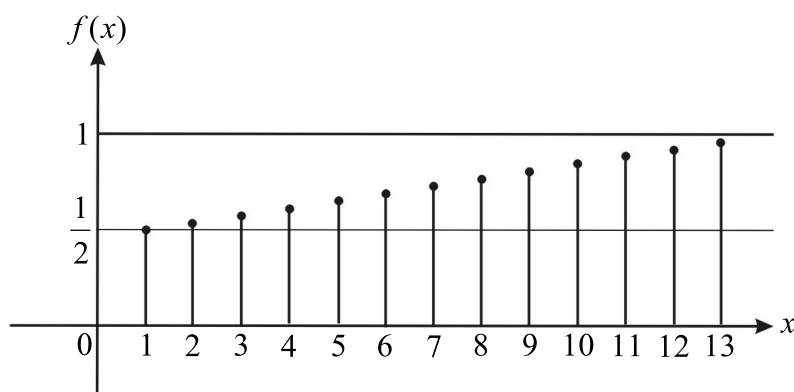
معلومات اضافی

برای معلومات هر چه بیشتر شما، مثال زیر موضوع درس را خوبتر توضیح میدهد:

مثال: گراف تابع $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$ را در حالی که $x\in IN$ و:

$$a_1=\frac{1}{2}\quad a_2=\frac{2}{3}\quad a_3=\frac{3}{4}\quad a_4=\frac{4}{5}$$
$$a_5=\frac{5}{6}\quad a_6=\frac{6}{7}\quad a_7=\frac{7}{8}\quad a_8=\frac{8}{9}$$
$$a_9=\frac{9}{10}\quad a_{10}=\frac{10}{11}\quad a_{11}=\frac{11}{12}\quad a_{12}=\frac{12}{13}$$

باشد رسم می‌نماییم:



در گراف دیده می‌شود که به هر اندازهٔ که x بزرگ میگردد حدود ترادف به عدد یک نزدیک میگردد، میتوانیم که $f(x)$ را به عدد یک، خیلی نزدیک کنیم به شرطی که عدد x را به اندازهٔ کافی بزرگ اختیار نماییم؛ طور مثال:

$$x = 100 \qquad f_{(100)} = \frac{100}{101} = 0.990099$$

و اگر:

$$x = 1000 \qquad f_{1000} = \frac{1000}{1001} = 0.9990009$$

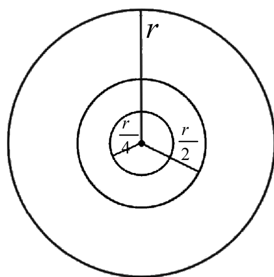
از اینجا دو نتیجه گرفته می‌شود:

نتیجهٔ اول: میتوان گفت اگر $x > 100$ را اختیار نماییم بقیه حدود ترادف در نزدیکی عدد(1) تجمع میکنند؛ یعنی در مجاورت عدد یک قرار میگیرند.

نتیجهٔ دوم: نتیجهٔ اول رامیتوان به شکل دیگر بیان نمود و آن این که لیمیت ترادف، مساوی به عدد یک است زمانی که متحول x طرف بی نهایت تقرب کند قرار زیر میتوان نوشت:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{x}{x+1} = 1 \qquad x \in IN$$

در این ترادف تمام حدود کوچکتر از عدد یک اند.



فصل اول

عنوان درس: مفهوم لیمیت

صفحهٔ کتاب: (6 - 5)

وقت:(یک ساعت درسی) ساعت دوم درسی

اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	• شاگردان مفهوم تقرب متحول به یک عدد را به سمت راست و چپ رابفهمند. • شاگردان تعریف لیمیت و تحلیل هندسی لیمیت را در یک انتروال باز بدانند. • شاگردان فرق بین تقرب به سمت راست و چپ را به یک عدد تشخیص کرده بتوانند. • شاگردان سؤال های مربوط به تقرب متحول به یک عدد و تعریف لیمیت را حل کرده بتوانند. • شاگردان از حل سؤال های مربوط به تقرب متحول و تعریف لیمیت احساس خوشی نمایند.
روش های تدریس	سؤال و جواب، کار انفرادی
مواد ممد درسی	مواد مورد نیاز
توضیح ورودی (5) دقیقه	بعد از داخل شدن به صنف و انجام کارهای مقدماتی تدریس که ضروری اندبه ارائهٔ درس جدید بپردازید؛ طوری که در قدم نخست موضوعی که باعث ایجاد انگیزه میشود به شکل سؤال از شاگردان بپرسید، در غیر آن چون این درس به دوام درس قبلی است، بنا بر این میتوانید بخش ورودی درس قبلی را در این درس نیز طور تکراری توضیح نمایید.

فعالیت جریان درس: (28) دقیقه

معلم محترم موضوع تقرب متحول به یک عدد، تقرب متحول از راست و چپ را خود شما به شکل مفصل با سهیم ساختن شاگردان توضیح و تشریح نمایید. سپس مثال صفحهٔ 6 کتاب درسی را به شاگردان وظیفه دهید تا به شکل انفرادی در کتابچه‌های شان حل نمایند و همزمان از یک شاگرد داوطلب بخواهیدتا مثال مذکور را روی تخته حل نماید.

در جریان کار انفرادی، شاگردان را تشویق و آنها را رهنمایی نمایید. زمانی که مطمئن شدید که حل تخته کاملاً درست است از تمام شاگردان بخواهید تا سؤال حل شدهٔ کتابچه‌های شان را با سؤال حل شدهٔ روی تخته مقایسه نمایند؛ اگر کدام اشتباه یا مشکل در حل شان موجود باشد آن را اصلاح نمایند.

در اخیر تعریف لیمیت را با استفاده از شکل هندسی آن قدم به قدم با سهم ساختن شاگردان تشریح و توضیح نمایید.

تحکیم درس: (7) دقیقه

برای تحکیم درس سؤال تمرین صفحهٔ 6 کتاب درسی را به شاگردان وظیفه دهید تا آن را در کتابچه‌های شان به شکل انفرادی حل نموده و همزمان از یک شاگرد داوطلب بخواهید تا سؤال مذکور را روی تخته حل نماید. زمانی-که مطمئن شدید که حل تخته کاملاً درست است از تمام شاگردان بخواهید تا کار خود شان را با حل سؤال روی تخته مقایسه نمایند تا اگر کدام اشتباهی موجود باشد آن را اصلاح نمایند.

ارزیابی ختم درس: (5) دقیقه

برای این‌که از آموختن بهتر درس ارائه شده توسط شاگردان اطمینان حاصل کنید؛ چند سؤال را قرار ذیل از آنها بپرسید:

- تقرب متحول به یک عدد چیست؟
- فرق بین تقرب متحول به یک عدد از سمت راست و چپ چیست؟
- لیمیت را به شکل سمبولیک تعریف نمایید.

معلومات اضافی

مفهوم تقرب متحول از راست و چپ را میتوان به شکل زیر نیز تشریح نمود:

تقرب متحول از راست و چپ به یک عدد:

1. اگر متحول x همیشه بزرگتر از عدد a باشد و هر قدر که یک عدد به عدد a نزدیک و نزدیکتر شود، می‌گوییم متحول x از سمت راست به عدد a تقرب می‌کند و آن را به سمبول $x \to a^+$ نشان می‌دهیم، خوانده می‌شود که: زمانی که x از سمت راست به عدد a تقر ب کند در این صورت برای تمام قیمت‌های $\varepsilon > 0$ شرطی این که xبزرگتر از a و کوچکتر از $a+\varepsilon$ موجود است؛ که در ریاضی چنین می‌نویسند

$$x \to a^+ \equiv \forall \varepsilon > 0 : a < x < a + \varepsilon$$

یعنی x در مجاورت راست نقطهٔ a واقع است.

2. اگر متحول x همیشه کوچکتر از عدد a باشد و هر قدر که به عدد a نزدیک و نزدیکتر شود، می گوییم متحول x از سمت چپ به عدد a تقرب می‌کند و آن را به سمبول $x \to a^-$ نشان می‌دهیم؛ بنا بر این می‌نویسیم که:

$$x \to a^- \equiv \forall \varepsilon > 0 : a - \varepsilon < x < a$$

یعنی x در مجاورت چپ نقطهٔ a واقع است.

برای معلومات بیشتر ε قرار زیر تشریح شده است:

ε چیست؟

ε یک عدد حقیقی مثبت و بسیار کوچک است. اگر ε عدد ثابت باشد دیگر نمی‌تواند هر قیمتی را اختیار کند به این معنی که ε یک عدد کوچکی است که قیمت آن همواره بزرگتر از صفر می‌باشد.

توجه داشته باشید که ε یک سمبول است و شما میتوانید به جای آن هر سمبول دیگری مانند $a,\otimes$ و غیره را انتخاب کنید. ε متحول مثبت و اختیاری است؛ یعنی هر مقدار مثبتی را می تواند اختیار کند؛ مثلاً ε می‌تواند قیمت 10^{30000} را اختیار کند و یا قیمت 10^{-6600} را به خود اختیار نماید.

جواب به سؤال های تمرین

تابع $f(x)=2x$ را به صورت گرافیکی نشان دهید که اگر x به عدد 3 تقرب کند $f(x)$ مساوی به 6 میگردد.

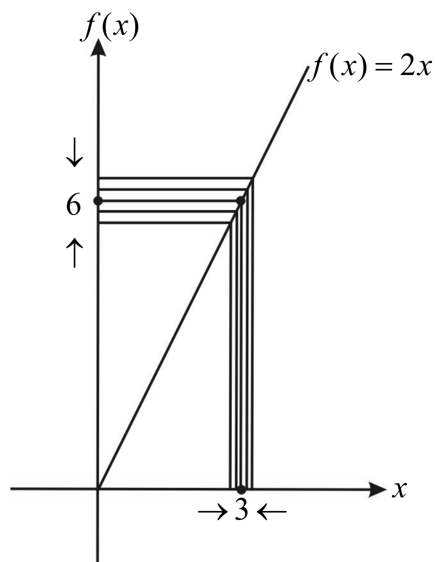
حل:

$f(x)=2x$

$x\to 3$

$f(x)\to 6$

x	2.98	2.99	2.999	3	3.001	3.01	3.02
$f(x)$	5.96	5.98	5.998	6	6.002	6.02	6.04





فصل اول

عنوان درس: لیمیت طرف راست و طرف چپ

صفحۀ کتاب(8-7)

وقت تدریس(یک ساعت درسی)

اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	• شاگردان مفهوم لیمیت طرف راست و چپ را بفهمند. • شاگردان لیمیت طرف راست و چپ را پیدا کرده بتوانند. • شاگردان لیمیت توابع را بااستفاده از تعریف لیمیت دریافت کرده بتوانند. • شاگردان موجودیت لیمیت توابع را با استفاده از لیمیت از طرف راست و طرف چپ به دست آورده بتوانند. • شاگردان سؤال‌ها و مثال‌های مربوط به لیمیت طرف راست و چپ را حل کرده بتوانند. • شاگردان حل سؤال‌ها و مثال‌های مربوط به لیمیت طرف راست و چپ علاقه‌مند شوند.
روش های تدریس	سؤال و جواب، کارهای گروهی و انفرادی
مواد ممد درسی	چارت بخش ورودی
توضیح ورودی (5) دقیقه	بعد از داخل شدن به صنف و انجام کارهای مقدماتی تدریس، به ارائۀ درس جدید بپردازید. چارت شکل ورودی را در مقابل صنف آویزان نموده و سؤال مربوط آن را از شاگردان بپرسید. آنها را طوری تشویق و رهنمایی نمایید که جواب‌های درست را ارائه نمایند در غیرآن میتوانید تشریحات لازم را قرار ذیل ارائه نمایید: درشکل بالا معلوم میگردد که به درخت از دو سمت راست و چپ میتوان نزدیک شد، طوری‌که این نزدیک شدن از هر دو طرف به درخت تقریباً مساوی است. به عین شکل میتوان موجودیت لیمیت توابع را با دریافت لیمیت طرف راست و طرف چپ آن به دست آورد.

فعالیت جریان درس: (28) دقیقه

شاگردان را به گروه های مناسب تقسیم نموده و فعالیت صفحۀ هفتم کتاب درسی را به آنها وظیفه دهیدتا در گروه های شان انجام دهند.در جریان کار گروهی از گروه ها نظارت به عمل آرید تا همۀ شاگردان در این فعالیت سهم فعال داشته باشند، در صورت مشکلات، آنها را کمک و رهنمایی نمایید. در ختم فعالیت، از نمایندۀ گروه بخواهید تا فعالیت انجام شدۀ گروهی خویش را روی تخته توضیح نمایید؛ درصورتی که کار گروهی درست اجرا شده باشد از تمام گروه های دیگر بخواهید تا کار های گروهی خویش را با آن مقایسه نمایند. اگر اشتباهی در فعالیت گروهی شان موجود باشد آن را اصلاح نمایند.

نتیجهٔ فعالیت را که به شکل دو تعریف لیمیت طرف راست و لیمیت طرف چپ در صفحهٔ هفتم کتاب درسی آمده است با استفاده از ترسیم شکل هندسی لیمیت که در صفحهٔ ششم کتاب درسی موجود است به شکل سؤال و جواب به شاگردان توضیح نمایید.

تحکیم درس: (7) دقیقه

برای تحکیم درس از یک شاگرد داوطلب بخواهید تا مثال دوم صفحهٔ هشتم کتاب درسی را روی تخته حل نموده و همزمان به آن از متباقی شاگردان بخواهید تا مثال مذکور را در کتابچه‌های خویش حل نمایند. در اخیر از آنها بخواهید تا سؤال حل شدهٔ کتابچه‌های شان را با سؤال حل شدهٔ روی تخته مقایسه نمایند. اگر کدام اشتباهی در حل سؤال ایشان موجود باشد آنها را متوجه نموده و آن را اصلاح نمایید.

(کوشش به عمل آرید تا شاگردان در جریان کار انفرادی از سؤال حل شدهٔ کتاب استفاده ننمایند)

ارزیابی ختم درس: (5) دقیقه

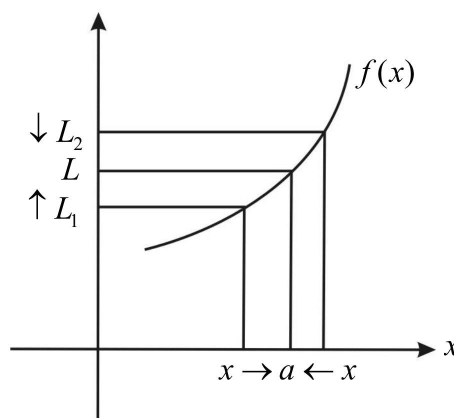
معلم محترم برای این که مطمئن شود که آیا شاگردان درس را یاد گرفته اند یا خیر؟ سؤالهای زیر را از آنها بپرسید:

- فرق بین لیمت تابع از طرف راست ولیمیت تابع از طرف چپ چیست؟
- موجودیت لیمیت و عدم موجودیت لیمیت را چطور میتوان تشخیص داد؟

معلومات اضافی

موضوع لیمیت طرف راست و لیمیت طرف چپ را قرار ذیل نیز میتوان تشریح و توضیح نمود:

1. در یک تابع f اگر متحول x با مقدار بزرگتر از عدد a به عدد a تقرب کند و مقداره $f(x)$ به یک عدد L نزدیک شود، می‌گوییم تابع f در نقطهٔ a لیمیت طرف راست دارد و مقدار لیمیت طرف راست آن عبارت از L_2 است؛ یعنی: $\lim_{x\to a^+} f(x) = L_2$
2. در یک تابع f اگر متحول x با مقدار کوچکتر از عدد a به عدد a تقرب کند و مقدار $f(x)$ به عدد L نزدیک شود، می‌گوییم تابع f در نقطهٔ a لیمیت طرف چپ دارد و مقدار لیمیت طرف چپ آن عبارت از L_1 است؛ یعنی: $\lim_{x\to a^-} f(x) = L_1$



جواب به سؤال های تمرین

نشان دهید که تابع $f(x)=\frac{|x-2|}{x-2}$ وقتی که $x\to 2$ تقرب نماید لیمیت ندارد؟

$$f(x)=\frac{|x-2|}{x-2}$$

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{|x-2|}{x-2}=?$$

x	2.5	2.1	2.01	2.001	$\to 2^+$
$f(x)$	1	1	1	1	$\to 1$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+}\frac{|x-2|}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{(x-2)}{(x-2)}=\lim_{x\to 2^+}1=1$$

x	1.5	1.9	1.99	1.999	$\to 2^-$
$f(x)$	-1	-1	-1	-1	$\to -1$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}\frac{|x-2|}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}-\frac{(x-2)}{(x-2)}=\lim_{x\to 2^-}(-1)=-1$$

چون $\lim_{x\to 2^-} f(x)\neq\lim_{x\to 2^+} f(x)$ است؛ بنابراین لیمیت تابع $f(x)$ موجود نیست.

فصل اول

$$\lim_{x\to -1}(x^2 \pm x) = \lim_{x\to -1} x^2 \pm \lim_{x\to -1} x$$

عنوان درس: خواص لیمیت

صفحهٔ کتاب (10 - 9)

وقت تدریس(سه ساعت درسی) ساعت اول درسی(45 دقیقه)

اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	• شاگردان خواص لیمیت و موضوع توابع بی‌نهایت کوچک و خواص آن را بفهمند. • شاگردان با استفاده از خواص لیمیت سؤال‌ها ومثال‌های لیمیت را حل کرده بتوانند. • شاگردان با حل سؤال‌ها و مثال‌های مربوط به لیمیت علاقه‌مند شوند.
روش های تدریس	سؤال و جواب، کارهای گروهی و انفرادی
مواد ممد درسی	چارت بخش ورودی
توضیح ورودی (5) دقیقه	بعد از داخل شدن به صنف و انجام کار های مقدماتی تدریس، به ارائهٔ درس جدید بپردازید چارت شکل ورودی را در پیشروی صنف آویزان نموده و سؤال مربوط آن را از شاگردان بپرسید. آنها را طوری تشویق و رهنمای نمایید تا بتوانند مساوات را محاسبه نموده و جواب های درست را ارائه نمایند، در غیر آن روی تخته هر دو طرف مساوات را با سهم‌گیری فعال شاگردان حل نمایید.

فعالیت جریان درس: (28) دقیقه

شاگردان را به گروه های مناسب تقسیم نموده و فعالیت صفحهٔ(9)کتاب درسی را به آنها وظیفه دهید تا آن را در گروه های شان انجام دهند. در جریان فعالیت، کار گروهها را مشاهده نموده و آنها را رهنمایی نمایید. کوشش کنید تا شاگردان را با سهیم شدن در فعالیت گروهی تشویق نمایید. گروهها را رهنمایی نمایید تا قیمت تابع(f) را در($x = 2$) وقیمت تابع(g)را در($x = 3$) به دست آرند و خواص چهارگانهٔ لیمیت(جمع، تفریق، ضرب و تقسیم) را در این توابع تطبیق نمایند. درختم فعالیت از نمایندهٔ گروهها بخواهید تا کار گروهی خویش را روی تخته توضیح نمایند و از همه شاگردان بخواهید تا کارهای گروهی خویش را با آن مقایسه نمایند؛ اگر اشتباهی در کار گروهی شان موجود باشد آن را اصلاح نمایند، سپس نتیجهٔ فعالیت را با سهم فعال شاگردان روی تخته توضیح و تشریح نمایید.

موضوع توابع بی‌نهایت کوچک را با چهار خاصیت آن روی تخته باسهم فعال شاگردان توضیح و تشریح نمایید. در اخیر مثال اول صفحهٔ(10)کتاب درسی را روی تخته حل نمایید.

تحکیم درس: (7) دقیقه

برای تحکیم درس سه سؤال مثال دوم صفحهٔ(10)کتاب درسی را به شاگردان وظیفه دهید تا در کتابچه‌های شان به شکل انفرادی حل نمایند. از یک شاگرد داوطلب بخواهید تا همزمان آن را به روی تخته حل نماید، اگر در حل سؤال روی تخته اشتباه موجود بود از یک شاگرد اوطلب دیگر بخواهید تا آن را اصلاح نماید. زمانی که مطمئن

شدید حل سؤال روی تخته کاملاً صحیح است از تمام شاگردان بخواهید تـا سـؤال حـل شـدۀ کتابچـه‌هـای شـان را بـا سؤال حل شدۀ روی تخته مقایسه نمایند، اگر اشتباهی در کار انفرادی شاگردان موجود باشد به اصلاح آن بپردازند.
(در جریان کار انفرادی شاگردان از سؤال حل شدۀ کتاب درسی استفاده ننمایند.)

ارزیابی ختم درس: (5) دقیقه

معلم محترم برای این که مطمئن شوید شاگردان درس ارائه شده را خوب فرا گرفته اند یا خیر؟ میتوانـد چنـد سـؤال را بـه شکل ذیل از آنها بپرسید و جواب های قناعت بخش به دست آرید:

- کدام خواص لیمیت را در این درس یاد گرفته اید؟
- چه وقت یک تابع بی‌نهایت کوچک نامیده میشود؟
- آیا حاصل ضرب توابع بی‌نهایت کوچک بازهم توابع بی‌نهایت کوچک است یا خیر؟

معلومات اضافی

در محاسبۀ لیمیت میتوان از خواص ذیل نیز استفاده نمود:

$$\lim_{x\to a} x = a$$

$$\lim_{x\to a} c = c$$

$$\lim_{x\to a} |f(x)| = |\lim_{x\to a} f(x)|$$

در صورتیکه $\lim_{x\to a} f(x) = L$ $\qquad \lim_{x\to a} (f(x))^n = (L^n)$

خواص لیمیت توابع پولینومی و توابع ناطق:

1) $\lim_{x\to a}(x) = a$

2) $\lim_{x\to a}(x)^n = a^n$

3) $\lim_{x\to b}(a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ \dots \ + a_n) = a_0b^n + a_1b^{n-1} + \ \dots \ + a_n$

4) $\lim_{x\to c}\left(\frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ \dots \ + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ \dots \ + b_m}\right) = \frac{a_0c^n + a_1c^{n-1} + \ \dots \ + a_n}{b_0c^m + b_1c^{m-1} + \ \dots \ + b_m}$

درحالی‌که لیمیت مخرج خلاف صفر باشد.

5) $\lim_{x\to d}(\sqrt[n]{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ \dots \ + a_n} = \sqrt[n]{a_0d^n + a_1d^{n-1} + \ \dots \ + a_n}$

$$\lim_{x \to -1}(x^2 \pm x) = \lim_{x \to -1} x^2 \pm \lim_{x \to -1} x$$

فصل اول

عنوان درس: خواص لیمیت

صفحۀ کتاب (11 - 10)

وقت تدریس: یک ساعت درسی(45 دقیقه)

اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	• شاگردان طریقۀ ثبوت خواص لیمیت را بفهمند. • شاگردان خواص لیمیت را ثبوت و سؤال‌های مربوط به آن را حل کرده بتوانند. • شاگردان به ثبوت خواص لیمیت و حل سؤال‌های مربوط به آن علاقه‌مند شوند.
روش های تدریس	سؤال و جواب، کارهای گروهی و انفرادی
مواد ممد درسی	مواد مورد نیاز
توضیح ورودی (5) دقیقه	بعد از داخل شدن به صنف وانجام کارهای مقدماتی تدریس، به ارائۀ درس جدید بپردازید، در این بخش میتوانید بخش ورودی درس قبلی را تکرار نمایید در غیر آن اگر مشکلات در درس قبلی موجود بود آن را با سهم گیری فعال شاگردان حل نمایید.

فعالیت جریان درس: (28) دقیقه

شاگردان را به گروه های مناسب تقسیم نموده و از آنها بخواهید تا خاصیت اول لیمیت در صفحۀ 10 کتاب درسی را در گروه های شان ثبوت نمایند؛ ولی از ثبوت کتاب درسی استفاده ننمایند. در جریان کار گروهی از گروه‌ها نظارت به عمل آرید و شاگردان را در گروه های شان تشویق و رهنمای نمایید تا همه در ثبوت این خاصیت لیمیت سهیم شوند. در ختم فعالیت گروهی از نمایندۀ یک گروه بخواهید تا کار گروهی خویش را روی تخته تشریح و توضیح نماید و از همۀ شاگردان بخواهید کارهای گروهی خویش را با آن مقایسه نمایند تا اگر اشتباهی در کار گروهی شان موجود باشد آن را اصلاح نمایند و اگر لازم بود آن را دوباره خود تان روی تخته ثبوت نمایید.

در اخیر خاصیت دوم لیمیت را که در صفحۀ(11) کتاب درسی موجود است با سهم فعال شاگردان به شکل سؤال و جواب روی تخته ثبوت و توضیح نمایید.

تحکیم درس: (7) دقیقه

برای تحکیم درس جدید به شاگردان وظیفه دهید تا خاصیت سوم لیمیت را که در صفحۀ(11) کتاب درسی آمده است به شکل انفرادی در کتابچه‌های شان ثبوت نمایند و همزمان از یک شاگرد داوطلب بخواهید تا خاصیت مذکور را روی تخته ثبوت نماید. در جریان کار انفرادی همه شاگردان را رهنمایی و تشویق نمایید تا بتوانند این خاصیت

لیمیت را درست ثبوت نمایند. در اخیر اگر سؤال حل شدۀ روی تخته درست بود از همه شاگردان بخواهید تا کارهای انفرادی خویش را با ثبوت روی تخته مقایسه نمایند، تا اگر اشتباهی در کار شان موجود باشد به اصلاح آن بپردازند.

(در جریان کار انفرادی شاگردان از ثبوت کتاب استفاده ننمایند)

ارزیابی ختم درس: (5) دقیقه

معلم محترم برای این که مطمئن شوید آیا شاگردان درس ارائه شده را خوب یاد گرفته اند یا خیر؟ میتوانید چند سؤال را به شکل ذیل از آنها بپرسید:

- لیمیت حاصل جمع و حاصل تفریق دو تابع یا چند تابع مساوی به چیست؟
- لیمیت حاصل ضرب دو یا چند تابع مساوی به چیست؟
- لیمیت حاصل تقسیم دو تابع مساوی به چیست؟

فصل اول

عنوان درس: قضیهٔ ساندویچ

صفحهٔ کتاب (12)

وقت تدریس: یک ساعت درسی(45 دقیقه)

اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	• شاگردان مفهوم قضیهٔ ساندویچ را بفهمند. • شاگردان مفهوم قضیهٔ دوم صفحهٔ(12) کتاب درسی را بدانند. • شاگردان سؤال‌ها و مثال‌های مربوط به قضایای صفحهٔ(12)کتاب درسی را حل کرده بتوانند. • شاگردان به حل سؤال‌ها و مثال‌های مربوط به قضایای صفحهٔ 12 کتاب درسی علاقه‌مند شوند.
روش های تدریس	سؤال و جواب، کارهای گروهی و انفرادی
مواد ممد درسی	مواد مورد نیاز
توضیح ورودی (5) دقیقه	بعد از داخل شدن به صنف و انجام کارهای مقدماتی تدریس، به ارائهٔ درس جدید بپردازید در این بخش میتوانید بخش ورودی درس قبلی را تکرار نمایید. برای ایجاد انگیزه سؤال $\lim_{x\to 0}(x\cdot\cos\frac{1}{x})$ را روی تخته بنویسید و از شاگردان بپرسید که چگونه میتوان این سؤال را حل نمود؟کوشش نمایید تا شاگردان را طوری تشویق و رهنمای نمایید که بتوانند جواب درست را به دست آرند در غیر آن سؤال را روی تخته طوری توضیح نمایید: نظر به خواص لیمیت $\lim_{x\to 0}(x\cdot\cos\frac{1}{x})$ موجود نیست، بنا بر این باید راه حل دیگری موجود باشد که بتوانیم چنین سؤال های را حل نماییم؛ بنا بر این با استفاده از قضیهٔ ساندویچ آن را میتوان حل نمود.(طوری که حل سؤال دربخش معلومات اضافی این درس موجود است.)

فعالیت جریان درس: (28) دقیقه

قضیهٔ ساندویچ را با سهیم ساختن شاگردان به شکل سؤال و جواب روی تخته توضیح و تشریح نمایید و گراف آن را روی تخته ترسیم نموده و به آنها نشان دهید که چون گراف آن شکل ساندویچ را دارد؛ بنا بر این به این نام یاد میگردد؛ سپس شاگردان را به گروه های مناسب تقسیم نموده و به آنها وظیفه دهیدتا مثال اول صفحهٔ(12) کتاب درسی را به کمک قضیهٔ ساندویچ حل نمایند و از حل کتاب درسی استفاده ننمایند در وقت مشاهده گروه‌ها را رهنمایی و تشویق نمایید تا همه در فعالیت سهم فعال داشته باشند. در ختم فعالیت از نمایندهٔ یک گروه بخواهید تا فعالیت گروهی خویش را روی تخته توضیح نماید. اگر اشتباهی در کار گروهی‌شان موجود باشد شما خود به اصلاح آن بپردازید؛ سپس قضیهٔ دوم صفحهٔ(12)کتاب درسی را با سهیم ساختن شاگردان روی تخته توضیح و تشریح نمایید و مثال بعدی آن را همچنان به عین شکل روی تخته حل نمایید.

تحکیم درس: (7) دقیقه

برای تحکیم درس مثال دوم صفحهٔ(12) کتاب درسی را به شاگردان وظیفه دهید تا آن را در کتابچه‌های شان به شکل انفرادی حل نمایند، همزمان از یک شاگرد داوطلب بخواهید تا مثال مذکور را روی تخته حل نماید. اگر در حل روی تخته اشتباهی موجود باشد از یک شاگرد دیگر بخواهید تا آن را اصلاح کند، زمانی که مطمئن شدید که سؤال حل شدهٔ روی تخته کاملاً درست است از همهٔ شاگردان بخواهید تا حل سؤال شان را با آن مقایسه نمایند تا اگر اشتباهی صورت گرفته باشد اصلاح گردد.(در جریان کار انفرادی، شاگردان از حل سؤال حل شدهٔ کتاب درسی استفاده ننمایند)

ارزیابی ختم درس: (5) دقیقه

معلم محترم برای این که مطمئن شوید آیا شاگردان درس ارائه شده را خوب درک نموده اند یا خیر؟ میتوانید سؤال $\lim\limits_{x\to 0} x^4\cos\frac{2}{x}$ را روی تخته بنویسید و از یک شاگرد داوطلب بخواهید تا آن را روی تخته با سهم فعال شاگردان و رهنمایی شما حل نماید.(حل این سؤال در بخش معلومات اضافی برای معلم در این درس موجود است.)

معلومات اضافی

مثال 1:

$$\lim_{x\to 0}(x\cos\frac{1}{x}) = ?$$

حل:

$$\lim_{x\to 0}(x\cos\frac{1}{x}) = \lim_{x\to 0} x\cdot\lim_{x\to 0}\cos\frac{1}{x}$$

چون $\lim\limits_{x\to 0}\cos\frac{1}{x} = \cos\frac{1}{0} = \cos\infty$ موجود نیست $\cos\infty$ شکل $\lim x\cdot\lim\cos\frac{1}{x}$ شکل $0\cdot\cos\infty$ را دارد که مبهم است، با استفاده از قضیهٔ ساندویچ می‌توان نوشت:

$$-1 \le \cos\frac{1}{x} \le 1 \ \Rightarrow -x \le x\cos\frac{1}{x} \le x$$

$$\lim_{x\to 0}(-x) \le \lim_{x\to 0} x\cos\frac{1}{x} \le \lim_{x\to 0} x$$

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0}(-x) = 0\\ \lim\limits_{x\to 0} x = 0\end{cases} \Rightarrow\ 0 \le \lim_{x\to 0} x\cos\frac{1}{x} \le 0$$

$$\Rightarrow\ \lim_{x\to 0} x\cos\frac{1}{x} = 0$$

مثال 2:

$$\lim_{x\to 0}(x\cos\frac{1}{x}) = ?$$

حل:

$$\lim_{x\to 0} x^4\cos\frac{2}{x} = \lim_{x\to 0} x^4 \cdot \lim_{x\to 0} x\cos\frac{2}{x} = 0\cdot\cos\infty$$

چون $\lim_{x\to 0}\cos\frac{2}{x}$ موجود نیست؛ بنا بر این :

$$-1 \le \cos\frac{2}{x} \le 1$$

$$-x^4 \le 4\cos\frac{2}{x} \le x^4$$

$$\lim_{x\to 0} -x^4 \le \lim_{x\to 0} x^4\cos\frac{2}{x} \le \lim_{x\to 0} x^4$$

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0}(-x^4) = -(0)^4 = 0\\ \lim\limits_{x\to 0}(x^4) = (0)^4 = 0\end{cases}$$

$$0 \le \lim_{x\to 0} x^4\cos\frac{2}{x} \le 0$$

$$\lim_{x\to 0} x^4\cos\frac{2}{x} = 0$$

مثال 3: نشان دهید که $\lim_{x\to 0}(x^2\sin\frac{1}{x}) = 0$ است.

حل:

$$\lim_{x\to 0}(x^2\sin\frac{1}{x}) = \lim_{x\to 0} x^2 \cdot \lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$$

چون $\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ موجود نیست؛ بنا بر این از قضیهٔ ساندویچ استفاده می‌نماییم:

$$-1 \le \sin\frac{1}{x} \le 1 \;\Rightarrow\; -x^2 \le x^2\sin\frac{1}{x} \le x^2 \;\Rightarrow\; \lim_{x\to 0} -x^2 \le \lim_{x\to 0} x^2\sin\frac{1}{x} \le \lim_{x\to 0} x^2$$

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0} -x^2 = 0\\ \lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0\end{cases} \;\Rightarrow\; 0 \le \lim_{x\to 0} x^2\sin\frac{1}{x} \le 0 \;\Rightarrow\; (\lim_{x\to 0} x^2\sin\frac{1}{x}) = 0$$

مثال 4: برای هر $x \ne 0$ داریم: $3 - x^2 \le f(x) \le 3 + x^2$

$\lim_{x\to 0} f(x)$ را به دست آرید.

حل:

$$\lim_{x\to 0}(3 - x^2) \le \lim_{x\to 0} f(x) \le \lim_{x\to 0}(3 + x^2)$$

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0}(3 - x^2) = 3\\ \lim\limits_{x\to 0}(3 + x^2) = 3\end{cases} \;\Rightarrow\; 3 \le \lim_{x\to 0} f(x) \le 3 \;\Rightarrow\; \lim_{x\to 0} f(x) = 3$$

جواب به سؤال های تمرین

1) $\lim_{x\to 0}(6x^3-2x^2+5x+3)=?$

$$\lim_{x\to 0}(6x^3-2x^2+5x+3)=\lim_{x\to 0}6x^3-\lim_{x\to 0}2x^2+\lim_{x\to 0}5x+\lim_{x\to 0}3$$
$$=6(0)^3-2(0)^2+5(0)+3=0-0+0+3=3$$

2) $\lim_{x\to -1}(x^7-2x-5)=?$

$$\lim_{x\to -1}(x^7-2x-5)=\lim_{x\to -1}x^7-\lim_{x\to -1}2x-\lim_{x\to -1}5=(-1)^7-2(-1)-5$$
$$=-1+2-5=-4$$

3) $\lim_{x\to 0}(\frac{(9x+2)^2-4}{x})=?$

چون مخرج کسر باید خلاف صفر باشد؛ بنا بر این نخست باید کسر ساده شود:

$$\lim_{x\to 0}(\frac{(9x+2)^2-4}{x})=\lim_{x\to 0}(\frac{81x^2+36x+4-4}{x})$$
$$=\lim_{x\to 0}(\frac{81x^2+36x}{x})=\lim_{x\to 0}(\frac{x(81x+36)}{x})$$
$$=\lim_{x\to 0}(81x+36)=81(0)+36=36$$

4) $\lim_{x\to 0}(\frac{5x^2+7x}{(2x-5)^2-9})=?$

$$\lim_{x\to 0}(\frac{5x^2+7x}{(2x-5)^2-9})=\frac{\lim_{x\to 0}(5x^2+7x)}{\lim_{x\to 0}\{(2x-5)^2-9\}}=\frac{\lim_{x\to 0}5x^2+\lim_{x\to 0}7x}{\lim_{x\to 0}(4x^2-20x+25-9)}$$
$$=\frac{\lim_{x\to 0}5x^2+\lim_{x\to 0}7x}{\lim_{x\to 0}(4x^2-20x+16)}=\frac{\lim_{x\to 0}5x^2+\lim_{x\to 0}7x}{\lim_{x\to 0}4x^2-\lim_{x\to 0}20x+\lim_{x\to 0}16}$$
$$=\frac{5(0)^2+7(0)}{4(0)^2-20(0)+16}=\frac{0+0}{0-0+16}=\frac{0}{16}=0$$

5) $\lim_{x\to 2}\sqrt{x-2}=?$

$$\lim_{x\to 2}\sqrt{x-2}=\sqrt{\lim_{x\to 2}(x-2)}$$
$$=\sqrt{(2-2)}=\sqrt{0}=0$$

6) $\lim_{x\to 1}(\frac{2x}{x^2-4x+1})=?$

$$\lim_{x\to 1}(\frac{2x}{x^2-4x+1})=\frac{\lim_{x\to 1}2x}{\lim_{x\to 1}(x^2-4x+1)}=\frac{\lim_{x\to 1}2x}{\lim_{x\to 1}x^2-\lim_{x\to 1}4x+\lim_{x\to 1}1}$$
$$=\frac{2\cdot 1}{(1)^2-4(1)+1}=\frac{2}{1-4+1}=\frac{2}{-2}=-1$$

فصل اول

عنوان درس: لیمیت توابع نسبتی

صفحهٔ کتاب:(14 - 13)

وقت تدریس(یک ساعت درسی)

اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	• شاگردان مفهوم تابع نسبی را بدانند. • شاگردان لیمت توابع نسبی را با استفاده از قوانین آن دریافت کرده بتوانند. • شاگردان با حل سؤالهای توزیع نسبتی به ریاضی علاقه مند شوند.
روش های تدریس	سؤال و جواب، کارهای گروهی و انفرادی
مواد ممد درسی	چارت بخش ورودی
توضیح ورودی (5) دقیقه	بعد از داخل شدن به صنف و انجام کارهای مقدماتی تدریس، ارائهٔ درس جدید بپردازید، چارت شکل ورودی را در پیشروی صنف آویزان نموده و سؤال مربوطه به آن را از شاگردان بپرسید. آنها را طوری تشویق و رهنمایی نمایید که جواب های درست را ارائه نمایند. در غیر آن میتوانید تشریحات لازم را خود تان قرار ذیل ارائه نمایید: لیمیت توابع که با وضع نمودن قیمت داده شده به متحول آن، اشکال؛ مانند: $(\frac{0}{0}),(\frac{\infty}{\infty}),(\infty-\infty)$و $(0.\infty)$ را اختیار می-نماید به نام اشکال مبهم یاد میشوند و حل چنین اشکال از طریقه‌های مختلف صورت میگیرد.

فعالیت جریان درس: (28) دقیقه

معلم محترم شاگردان را به گروه های مناسب تقسیم نموده و به آنها وظیفه دهیدتا فعالیت اول صفحهٔ(13)کتاب درسی را که مربوط شکل مبهم $(\frac{0}{0})$ است در گروه های شان انجام دهند در جریان کار گروهی از گروه ها نظارت به عمل آرید و آنها را تشویق نماییدکه همه در گروه های شان سهم فعال داشته باشند. در ختم فعالیت از نمایندهٔ یک گروه بخواهید تا فعالیت انجام شدهٔ گروهی خویش را روی تخته توضیح نماید، اگر اعضای گروه متذکره فعالیت را درست انجام داده بودند از گروه های دیگر هم بخواهید تا کارهای گروهی خویش را با آن مقایسه نمایند تا اشتباهی که درکار شان موجود باشد به اصلاح آن بپردازند؛ سپس نتیجهٔ این فعالیت را باسهم گیری فعال شاگردان روی تخته توضیح و تشریح نمایید.

معلم محترم فعالیت دوم صفحهٔ(13)کتاب درسی را به شاگردان وظیفه دهید تا به شکل انفرادی در کتابچه‌های

خویش انجام داده و همزمان از یک شاگرد داوطلب بخواهید تا فعالیت مذکور را روی تخته انجام دهد. اگر کار روی تخته درست بود از همهٔ شاگردان بخواهید تا فعالیت انجام شدهٔ خویش را با فعالیت روی تخته مقایسه کنند، تا اگر اشتباهی در کار شان موجود باشد آن را اصلاح نمایند.

سپس نتیجهٔ این فعالیت را به شکل شیوهٔ و جواب روی تخته توضیح وتشریح نمایید.

تحکیم درس: (7) دقیقه

برای تحکیم درس اول مثال سؤال صفحهٔ(14)کتاب درسی را با سهم‌گیری فعال شاگردان روی تخته حل و توضیح نمایید. بعد از یک شاگرد داوطلب بخواهید تا جزء دوم مثال مذکور را با سهم فعال شاگردان روی تخته حل نماید.

ارزیابی ختم درس: (5) دقیقه

برای این که مطمئن شوید شاگردان درس ارائه شده را خوب یاد گرفته اند یا خیر؟ از یک شاگرد بخواهید تا جزء سوم مثال صفحهٔ 14 کتاب درسی را روی تخته با سهم فعال شاگردان دیگر حل نماید.

معلومات اضافی

در محاسبهٔ لیمیت به یکی از اشکال $(\frac{0}{0})$ ، $(\frac{\infty}{\infty})$، $(\infty-\infty)$ و $(0.\infty)$ این چهار شکل مبهم هیچ نوع مفهوم محاسباتی و یا عددی ندارند به همین دلیل این اشکال را اشکال مبهم یا تعریف ناشده مینامند، البته اشکال مبهم دیگری نیز موجود اند؛ مانند $(1^{\infty}, \infty^0, 0^0)$ قابل تذکر است که تمام اشکال مبهم، قابلیت تبدیلی به شکل مبهم $(\frac{0}{0})$ را دارند به همین علت شکل مبهم $(\frac{0}{0})$را اصلی مینامیم. معمولاً برای رفع شکل مبهم $(\frac{0}{0})$ از طریقهٔ تجزیه دیگر طروق و قاعدهٔ هوپیتال استفاده میشود.

جواب به سؤال های تمرین

1) $\lim\limits_{x\to3}\frac{3-x}{\sqrt{x+1}-2}=?$ 2) $\lim\limits_{x\to1}\frac{\frac{5}{2x-3}+5}{x^2-1}=?$ 3) $\lim\limits_{x\to4}\frac{x-4}{\sqrt{x}-2}=?$

4) $\lim\limits_{x\to2}\frac{\frac{2x}{x^2+1}-\frac{4}{5}}{x-2}=?$ 5) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{1}{x+3}-\frac{1}{3}}{x}=?$

حل:

$$1)\lim_{x\to3}\left(\frac{3-x}{\sqrt{x+1}-2}\right)=\frac{\lim\limits_{x\to3}(3-x)}{\lim\limits_{x\to3}(\sqrt{x+1}-2)}=\frac{3-3}{\sqrt{3+1}-2}=\frac{0}{\sqrt{4}-2}=\frac{0}{2-2}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to3}\left(\frac{3-x}{\sqrt{x+1}-2}\right)=\lim_{x\to3}\frac{(3-x)(\sqrt{x+1}+2)}{(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+1}+2)}=\lim_{x\to3}\frac{(3-x)(\sqrt{x+1}+2)}{(\sqrt{x+1})^2-(2)^2}$$

$$=\lim_{x\to3}\frac{(3-x)(\sqrt{x+1}+2)}{x+1-4}=\lim_{x\to3}\frac{(3-x)(\sqrt{x+1}+2)}{x-3}$$

$$=\lim_{x\to3}\frac{(3-x)(\sqrt{x+1}+2)}{-(3-x)}=\lim_{x\to3}-(\sqrt{x+1}+2)$$

$$=-\lim_{x\to3}\sqrt{x+1}-\lim_{x\to3}2=-\sqrt{\lim_{x\to3}(x+1)}-\lim_{x\to3}2$$

$$=-\sqrt{3+1}-2=-\sqrt{4}-2=-2-2=-4$$

$$2)\ \lim_{x\to1}\frac{\frac{5}{2x-3}+5}{x^2-1}$$

$$\lim_{x\to1}\frac{\frac{5}{2x-3}+5}{x^2-1}=\frac{\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{5}{2x-3}+5\right)}{\lim\limits_{x\to1}(x^2-1)}=\frac{\frac{5}{2(1)-3}+5}{((1)^2-1)}=\frac{\frac{5}{2-3}+5}{1-1}=\frac{-5+5}{1-1}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{\frac{5}{2x-3}+5}{x^2-1}\right)=\lim_{x\to1}\left(\frac{\frac{5+5(2x-3)}{(2x-3)}}{x^2-1}\right)=\lim_{x\to1}\left(\frac{\frac{5+10x-15}{2x-1}}{x^2-1}\right)$$

$$=\lim_{x\to1}\left(\frac{\frac{10x-10}{2x-3}}{x^2-1}\right)=\lim_{x\to1}\left(\frac{10x-10}{2x-3}\cdot\frac{1}{x^2-1}\right)$$

$$=\lim_{x\to1}\left(\frac{10(x-1)}{2x-3}\cdot\frac{1}{x^2-1}\right)=\lim_{x\to1}\left(\frac{10(x-1)}{(2x-3)(x-1)(x+1)}\right)$$

$$=\lim_{x\to1}\left(\frac{10}{(2x-3)(x+1)}\right)=\frac{\lim\limits_{x\to1}10}{\lim\limits_{x\to1}((2x-3)(x+1))}$$

$$=\frac{10}{(2-3)(2)}=\frac{10}{(-1)(2)}=\frac{10}{-2}=-5$$

$$3)\ \lim_{x\to4}\frac{x-4}{\sqrt{x}-2}=\frac{\lim\limits_{x\to4}(x-4)}{\lim\limits_{x\to4}(\sqrt{x}-2)}=\frac{4-4}{\sqrt{4}-2}=\frac{4-4}{2-2}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to4}\left(\frac{x-4}{\sqrt{x}-2}\right)=\lim_{x\to4}\frac{(x-4)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}=\lim_{x\to4}\frac{(x-4)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x})^2-(2)^2}=\lim_{x\to4}\frac{(x-4)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)}$$

$$=\lim_{x\to4}(\sqrt{x}+2)=\sqrt{4}+2=2+2=4$$

4) $\lim_{x\to 2}\dfrac{\dfrac{2x}{x^2+1}-\dfrac{4}{5}}{x-2}=\dfrac{\lim_{x\to 2}(\dfrac{2x}{x^2+1}-\dfrac{4}{5})}{\lim_{x\to 2}(x-2)}=\dfrac{\dfrac{2\cdot 2}{(2)^2+1}-\dfrac{4}{5}}{2-2}=\dfrac{\dfrac{4}{5}-\dfrac{4}{5}}{2-2}=\dfrac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 2}(\frac{\frac{2x}{x^2+1}-\frac{4}{5}}{x-2})=\lim_{x\to 2}\frac{\frac{5(2x)-4(x^2+1)}{5(x^2+1)}}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{\frac{10x-4x^2-4}{5(x^2+1)}}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2}(\frac{-(4x^2-10x+4)}{5(x^2+1)}\cdot\frac{1}{(x-2)})$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{-(2x-1)(2x-4)}{5(x^2+1)(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{-(2x-1)2(x-2)}{5(x^2+1)(x-2)}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{-2(2x-1)}{5(x^2+1)}=\frac{-\left[2(2(2)-1)\right]}{5((2)^2+1)}$$

$$=\frac{-2(4-1)}{5(4+1)}=\frac{-2\cdot 3}{5\cdot 5}=-\frac{-6}{25}$$

5) $\lim_{x\to 0}(\dfrac{\dfrac{1}{x+3}-\dfrac{1}{3}}{x})=\dfrac{\lim_{x\to 0}(\dfrac{1}{x+3}-\dfrac{1}{3})}{\lim_{x\to 0}x}=\dfrac{\dfrac{1}{0+3}-\dfrac{1}{3}}{0}=\dfrac{\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{3}}{0}=\dfrac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 0}(\frac{\frac{1}{x+3}-\frac{1}{3}}{x})=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{3-(x+3)}{3(x+3)}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{3-x-3}{3(x+3)}}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{-x}{3(x+3)}}{x}=\lim_{x\to 0}(\frac{-x}{3(x+3)}\cdot\frac{1}{x})$$

$$=\lim_{x\to 0}(\frac{-1}{3(x+3)})=\frac{-1}{3(0+3)}=\frac{-1}{3(3)}=-\frac{1}{9}$$

فصل اول

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-3x+8}{2x^2-2}$$

عنوان درس: شکل مبهم $\frac{\infty}{\infty}$

صفحهٔ کتاب: (18-15)

وقت تدریس(یک ساعت درسی)

اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	• شاگردان طریقهٔ حل لیمیت توابع که شکل مبهم ($\frac{\infty}{\infty}$) را اختیار مینماید، بدانند. • شاگردان مثال های مربوط لیمیت توابعی که شکل مبهم ($\frac{\infty}{\infty}$) را دارند حل کرده بتوانند. • شاگردان به حل سؤالها و مثالهای مربوط لیمیتی که شکل مبهم($\frac{\infty}{\infty}$) را اختیار مینمایند، علاقه‌مند شوند.
روش های تدریس	سؤال و جواب، کارهای گروهی و انفرادی
مواد ممد درسی	چارت بخش ورودی
توضیح ورودی (5) دقیقه	بعد از داخل شدن به صنف و انجام کارهای مقدماتی تدریس، ارائهٔ درس جدید بپردازید، چارت شکل ورودی را در پیشروی صنف آویزان نموده و سؤال مربوط به آن را از شاگردان بپرسید. آنها را تشویق و رهنمایی نمایید تا جواب های درست را ارائه نمایند در غیر آن خود شما چنین توضیحات لازم را ارائه نمایید: در چنین سؤال‌هایی اگر مستقیماً قیمت داده شده وضع شود شکل مبهم ($\frac{\infty}{\infty}$) را اختیار مینماید بنا بر این باید صورت و مخرج را تقسیم متحولی که بزرگترین توان را دارا است، یعنی در بخش ورودی که توان متحول(x^3) است مینماییم؛ پس از ساده ساختن، قیمت لیمیت را وضع نموده و حل آن که عبارت از (∞) است به دست می‌آید.

فعالیت جریان درس: (28) دقیقه

شاگردان را به گروه‌های مناسب تقسیم نموده و فعالیت صفحهٔ(15)کتاب درسی را به آنها وظیفه دهید تا در گروه‌های شان با مشورهٔ هم انجام دهند. در وقت مشاهده، ازگروه‌ها شاگردان را رهنمایی و تشویق نمایید تا همه در انجام فعالیت سهیم باشند، در ختم فعالیت از نمایندهٔ یک گروه بخواهید تا فعالیت انجام شدهٔ گروهی خویش را روی تخته توضیح نماید و ازگروه های دیگر بخواهید تا کار های گروهی خویش را با آن مقایسه نمایند تا اگر اشتباهی در کار شان موجود باشد به اصلاح آن بپردازند؛ سپس نتیجهٔ فعالیت را به شکل سؤال و جواب روی تخته توضیح و تشریح نمایید.

در اخیر مثال اول صفحهٔ (15) کتاب درسی و مثال دوم صفحهٔ(16)کتاب درسی را با سهیم ساختن شاگردان روی تخته حل و توضیح نمایید.

تحکیم درس: (7) دقیقه

برای تحکیم درس به شاگردان وظیفه دهید تا مثال سوم صفحهٔ (16)کتاب درسی را به شکل انفرادی در کتابچه‌های خویش حل نموده و همزمان از یک شاگرد داوطلب بخواهید تا مثال مذکور را روی تخته حل نماید. در صورتی‌که در حل تخته اشتباهی موجود باشد از یک شاگرد داوطلب دیگر بخواهید تا آن را اصلاح نماید، زمانی‌که مطمئن شدید که حل سؤال روی تخته درست است از همهٔ شاگردان بخواهید که سؤال حل شدهٔ کتابچه‌های شان را با سؤال حل شدهٔ روی تخته مقایسه نمایند تا اگر اشتباهی در حل ایشان موجود باشد به اصلاح آن بپردازند.

معلم یادداشت صفحهٔ(16)کتاب درسی را باسهیم ساختن شاگردان روی تخته توضیح و تشریح نمایید.

(کوشش نمایید تا در جریان کار انفرادی شاگردان از کتاب درسی استفاده ننمایند.)

ارزیابی ختم درس: (5) دقیقه

معلم محترم برای این که مطمئن شوید شاگردان درس ارائه شده را خوب فرا گرفته اند یا خیر؟ از یک شاگرد بخواهید تا مثال را با سهم فعال شاگردان حاضر در صنف، روی تخته حل نماید.

معلومات اضافی

به صورت عموم برای حل درتمام سؤال‌های لیمیت توابع که شکل مبهم($\frac{\infty}{\infty}$) را دارند نخست باید تابع از حالت مبهم($\frac{\infty}{\infty}$) به شکل مبهم($\frac{0}{0}$) تبدیل گردد و سپس راه حل حالت مبهم($\frac{0}{0}$) را می‌دانیم از آن طریق آن را حل می‌نماییم.

اگر دو پولینوم $f(x)$ و $g(x)$ را در نظر بگیریم طوری که: $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$

سه حالت متمایز وجود دارد:

1. اگر درجهٔ صورت کوچکتر از درجهٔ مخرج باشد، حاصل لیمیت مساوی به صفر است.
2. اگر صورت ومخرج همدرجه باشند حاصل تقسیم لیمیت عبارت از نسبت ضرایب متحول صورت بر مخرج است.
3. اگر توان متحول صورت بزرگتر از توان متحول مخرج باشد، لیمت مطلوب مساوی به بی‌نهایت است.

در صورتی‌که ضریب بزرگترین درجهٔ صورت را به حرف(a)نشان دهیم و ضریب بزرگترین درجهٔ مخرج را به حرف(b)نشان دهیم؛ بنا بر این در حالت سوم:

الف) هرگاه متحول به ($+\infty$) تقرب نماید دوحالت زیر موجود است:

- اگر $\frac{a}{b}>0$ باشد؛ بنا براین قیمت لیمیت ($+\infty$) است.
- اگر $\frac{a}{b}<0$ باشد؛ قیمت لیمیت ($-\infty$) است.

ب) هرگاه متحول به $-\infty$ تقرب نماید و اختلاف درجهٔ صورت و مخرج n باشد؛ بنا براین دو حالت زیر موجود است:

- اگر n عدد جفت باشد قیمت لیمیت(∞) و هم علامت ($\frac{a}{b}$) است .
- اگر n عدد طاق باشد قیمت لیمیت (∞) و مخالف علامت ($\frac{a}{b}$) است.

جواب به سؤال های تمرین

قیمت لیمیت های زیر را دریافت کنید:

$$1)\ \lim_{x\to\infty}\frac{6}{x^2-x} \quad , \quad 2)\ \lim_{x\to\infty}\frac{x^4+x^2+x+6}{x^3-3x+4}$$

$$3)\ \lim_{x\to\infty}\frac{x^5+x^2-x+9}{x^4+x^2-x-5} \quad , \quad 4)\ \lim_{x\to\infty}\frac{x^3+x^2-x+7}{x^3-x+5}$$

$$5)\ \lim_{x\to\infty}\frac{3x^3-2}{x+1}$$

حل:

$$1)\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{6}{x^2-x}\right)$$

$$\left.\begin{matrix} m=0 \\ n=2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow m<n \Rightarrow \lim_{x\to\infty}\left(\frac{6}{x^2-x}\right)=0$$

حل به طریقهٔ دیگر:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{6}{x^2-x}\right)=\frac{6}{(\infty)^2-(\infty)}=\frac{6}{\infty}=0$$

$$2)\ \lim_{x\to\infty}\frac{x^4+x^2+x+6}{x^3-3x+4}$$

$$\left.\begin{matrix} m=4 \\ n=3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow m>n \Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{x^4+x^2+x+6}{x^3-3x+4}=\infty$$

حل به طریقهٔ دیگر:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^4+x^2+x+6}{x^3-3x+4}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^4}{x^4}+\frac{x^2}{x^4}+\frac{x}{x^4}+\frac{6}{x^4}}{\frac{x^3}{x^4}-\frac{3x}{x^4}+\frac{4}{x^4}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}+\frac{6}{x^4}}{\frac{1}{x}-3\frac{1}{x^3}+\frac{4}{x^4}}=\frac{1+\frac{1}{\infty^2}+\frac{1}{\infty^3}+\frac{6}{\infty^4}}{\frac{1}{\infty}-3\frac{1}{\infty^3}+\frac{4}{\infty^4}}$$

$$=\frac{1+0+0+0}{0-0+0}=\frac{1}{0}=\infty$$

$$3)\ \lim_{x\to\infty}\frac{x^5+x^2-x+9}{x^4+x^2-x-5}$$

$$\left.\begin{matrix} m=5 \\ n=4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow m>n \Rightarrow \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^5+x^2-x+9}{x^4+x^2-x-5}\right)=\infty$$

حل به طریقهٔ دیگر:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^5+x^2-x+9}{x^4+x^2-x-5}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^5}{x^5}+\frac{x^2}{x^5}-\frac{x}{x^5}+\frac{9}{x^5}}{\frac{x^4}{x^5}+\frac{x^2}{x^5}-\frac{x}{x^5}-\frac{5}{x^5}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x^4}+\frac{9}{x^5}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x^4}-\frac{5}{x^5}}=\frac{1+\frac{1}{\infty^3}-\frac{1}{\infty^4}+\frac{9}{\infty^5}}{\frac{1}{\infty}+\frac{1}{\infty^3}-\frac{1}{\infty^4}-\frac{5}{\infty^5}}$$

$$=\frac{1+0-0+0}{0+0-0-0}=\frac{1}{0}=\infty$$

$$4)\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3+x^2-x+7}{x^3-x+5}\right)$$

$$\left.\begin{matrix} m=3 \\ n=3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow m=n \Rightarrow \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3+x^2-x+7}{x^3-x+5}\right)=\frac{1}{1}=1$$

حل به طریقهٔ دیگر:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3+x^2-x+7}{x^3-x+5}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^3}{x^3}+\frac{x^2}{x^3}-\frac{x}{x^3}+\frac{7}{x^3}}{\frac{x^3}{x^3}-\frac{x}{x^3}+\frac{5}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{7}{x^3}}{1-\frac{1}{x^2}+\frac{5}{x^3}}$$

$$=\frac{1+\frac{1}{\infty}-\frac{1}{\infty^2}+\frac{7}{\infty^3}}{1-\frac{1}{\infty^2}+\frac{5}{\infty^3}}=\frac{1+0-0+0}{1-0+0}=\frac{1}{1}=1$$

$$5)\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^3-2}{x+1}\right)$$

$$\left.\begin{matrix} m=3 \\ n=1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow m>n \Rightarrow \lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^3-2}{x+1}\right)=\infty$$

حل به طریقهٔ دیگر:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^3-2}{x+1}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{3\frac{x^3}{x^3}-\frac{2}{x^3}}{\frac{x}{x^3}+\frac{1}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{3-\frac{2}{x^3}}{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}=\frac{3-\frac{2}{\infty^3}}{\frac{1}{\infty^2}+\frac{1}{\infty^3}}=\frac{3-0}{0+0}=\frac{3}{0}=\infty$$

فصل اول

عنوان درس: اشکال مبهم $(0.\infty)$ و $(\infty - \infty)$

صفحهٔ کتاب: (20-19)

وقت تدریس(یک ساعت درسی)

اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	• شاگردان طریقه های حل توابع که اشکال مبهم $(\infty - \infty)$ و $(0.\infty)$ را اختیار مینمایند، بفهمند. • شاگردان سؤال های و مثال های مربوط به لیمیت توابع که اشکال مبهم $(\infty - \infty)$ و $(0.\infty)$ را اختیار مینمایند، حل کرده بتوانند. • شاگردان به حل سؤال های و مثال های مربوط به لیمیت توابع که اشکال مبهم $(\infty - \infty)$ و $(0.\infty)$ را اختیار مینمایند علاقه‌مند شوند.
روش های تدریس	سؤال و جواب، کارهای گروهی و انفرادی
مواد ممد درسی	چارت بخش ورودی کتاب
توضیح ورودی (5) دقیقه	بعد از داخل شدن به صنف و انجام کارهای مقدماتی تدریس که ضروری اند به ارائهٔ درس جدید بپردازید، چارت شکل ورودی را در پیشروی صنف آویزان نموده و سؤال مربوط به آن را از شاگردان بپرسید. آنها را تشویق و رهنمایی نمایید تا جواب های درست را ارائه نمایند، در غیر آن سؤال های داده شده را روی تخته طور زیر حل و توضیح نمایید: چون این دو سؤال بالترتیب اشکال مبهم $(\infty - \infty)$ و $(0.\infty)$ را اختیار مینمایند؛ بنا بر این اول باید به شکل مبهم $(\frac{0}{0})$ تبدیل شده و سپس حل گردد. جواب سؤال اول مساوی به $(-\frac{1}{4})$ و جواب سؤال دوم (450) به دست می آید.

فعالیت جریان درس: (28) دقیقه

معلم محترم شاگردان را به گروه های مناسب تقسیم نموده و فعالیت صفحهٔ(19)کتاب درسی را وظیفه دهید تا انجام دهند. در وقت مشاهده از گروه‌ها، شاگردان را به سهیم شدن در فعالیت گروهی تشویق نمایید، بعد از انجام فعالیت از نمایندهٔ یک گروه بخواهید تا فعالیت انجام شدهٔ گروهی خویش را روی تخته توضیح نماید. در صورتی‌که فعالیت گروهی به شکل درست انجام گردیده بود از گروه های دیگر بخواهید تا کار های گروهی خویش را با آن مقایسه نمایند تا اگر اشتباهی در کار شان موجود باشد به اصلاح آن بپردازند؛ سپس نتیجهٔ فعالیت را با سهیم ساختن شاگردان به شکل سؤال و جواب روی تخته توضیح و تشریح نمایید.

در اخیر جزء اول مثال صفحهٔ 19 کتاب درسی را به شکل سؤال و جواب روی تخته حل نمایید.

تحکیم درس: (7) دقیقه

برای تحکیم درس جزء دوم مثال صفحهٔ(19)کتاب درسی را به شاگردان وظیفه دهید تا به شکل انفرادی در کتابچه‌های خویش حل نموده و همزمان از یک شاگرد داوطلب بخواهیدتا آن را روی تخته حل نماید. درختم کار انفرادی اگر حل تخته درست بود از همهٔ شاگردان بخواهیدتا سؤال حل شدهٔ کتابچه‌های خویش را با سؤال حل شدهٔ روی تخته مقایسه نمایند تا اگر اشتباهی در کار شان موجود باشد به اصلاح آن بپردازند.

(متوجه باشید تا شاگردان در جریان کار انفرادی از سؤال حل شدهٔ کتاب درسی استفاده ننمایند.)

ارزیابی ختم درس: (5) دقیقه

معلم محترم برای این که اطمینان حاصل نمایید آیا شاگردان مفهوم درس ارائه شده راخوب دانسته اند یا خیر؟ از یک شاگرد داوطلب بخواهیدتا یکی از سؤال‌های تمرین صفحه(20) کتاب درسی را روی تخته با سهم گیری فعال شاگردان و رهنمایی شما حل نماید.

معلومات اضافی

1- **رفع شکل مبهم ($\infty - \infty$):** این شکل مبهم را به کمک مشترک گیری مخرج و یا ضرب یا تقسیم مزدوج خود تابع به شکل مبهم ($\frac{0}{0}$)درآورده و سپس نظر به طریقهٔ حل شکل مبهم ($\frac{0}{0}$)آنرا حل می‌نماییم وبرای رفع شکل مبهم ($\frac{0}{0}$)و($\frac{\infty}{\infty}$)بعضاً از قضیهٔ هوپیتال استفاده می گردد؛ طوری که شاگردان تا حال موضوع مشتق را نخوانده اند، بنا بر این صرف برای معلومات اضافی شما می گوییم که قضیهٔ هوپیتال قرار ذیل است :

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

2- **رفع شکل مبهم ($0.\infty$):** برای رفع شکل مبهم($0.\infty$) آن را به شکل مبهم $\frac{0}{0}$ تبدیل می کنیم؛ سپس با استفاده از راه حل شکل مبهم $\frac{0}{0}$ آن را حل می‌نماییم.

جواب به سؤال های تمرین

لیمیت سؤال های زیر را دریافت کنید:

1) $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})$

2) $\lim_{x\to 1}(\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1-x^2})$

3) $\lim_{x\to\infty}(x^5-8x^3)$

4) $\lim_{x\to 5}\left[(x^2-25)\frac{1}{x-5}\right]$

5) $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x+a}-\sqrt{x})$

حل:

$$1)\ \lim_{x\to\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})=\sqrt{\infty+1}-\sqrt{\infty}=\infty-\infty$$

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})=\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})\frac{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x+1})^2-(\sqrt{x})^2}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x+1-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{(x+1)^{\frac{1}{2}}+(x)^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{\sqrt{\infty+1}+\sqrt{\infty}}=\frac{1}{\infty}=0$$

$$\left.\begin{array}{l} m=0 \\ n=\frac{1}{2}\end{array}\right\}\Rightarrow m<n \Rightarrow \lim_{x\to\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})=0$$

$$2)\ \lim_{x\to1}(\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1-x^2})=\frac{1}{1-1}-\frac{1}{1-1^2}=\frac{1}{0}-\frac{1}{0}=\infty-\infty$$

$$\lim_{x\to1}(\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1-x^2})=\lim_{x\to1}(\frac{1+x-1}{1-x^2})=\lim_{x\to1}\frac{x}{1-x^2}=\frac{1}{1-1}=\frac{1}{0}=\infty$$

$$3)\ \lim_{x\to\infty}(x^5-8x^3)=\infty^5-8\infty^3=\infty-\infty$$

طريقۀ اول:

$$\lim_{x\to\infty}(x^5-8x^3)=\lim_{x\to\infty}(\frac{x^5-8x^3}{1})=\lim_{x\to\infty}(\frac{\frac{x^5}{x^5}-8\frac{x^3}{x^5}}{\frac{1}{x^5}})=\lim_{x\to\infty}(\frac{1-8\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^5}})=\frac{1-8\frac{1}{\infty}}{\frac{1}{\infty^5}}=\frac{1-0}{0}=\frac{1}{0}=\infty$$

طريقۀ دوم:

$$\lim_{x\to\infty}(x^5-8x^3)=\lim_{x\to\infty}x^5(1-\frac{8}{x^2}=\lim_{x\to\infty}x^5=\infty^5=\infty$$

$$4)\ \lim_{x\to5}\left[(x^2-25)\frac{1}{x-5}\right]=(5^2-25)(\frac{1}{5-5})=(25-25)\frac{1}{0}=0.\infty$$

$$\lim_{x\to5}\left[(x^2-25)\frac{1}{x-5}\right]=\lim_{x\to5}(\frac{(x-5)(x+5)}{(x-5)}=\lim_{x\to5}(x+5)=5+5=10$$

$$5)\ \lim_{x\to\infty}(\sqrt{x+a}-\sqrt{x})=(\sqrt{\infty+a}-\sqrt{\infty})=\infty-\infty$$

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x+a}-\sqrt{x})=\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x+a}-\sqrt{x})\frac{(\sqrt{x+a}+\sqrt{x})}{(\sqrt{x+a}+\sqrt{x})}=\lim_{x\to\infty}\frac{x+a-x}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{a}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x}}=\frac{a}{\infty}=0$$

فصل اول

عنوان درس: اشکال مبهم ($0^0, \infty^0, 1^\infty$)

صفحهٔ کتاب (23-21)

وقت تدریس(دو ساعت درسی) ساعت اول درسی

اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	• شاگردان با اشکال مبهم (0^0، ∞^0، 1^∞)آشنا شوند. • شاگردان مفهوم لیمیت تابعی را بفهمند که شکل مبهم(1^∞)را اختیار مینماید. • شاگردان سؤال‌ها و مثال‌های مربوط به لیمیت تابع که شکل مبهم (1^∞)را اختیار مینماید حل کرده بتوانند. • شاگردان به حل سؤال‌های و مثال‌های مربوط به لیمیت تابعی که شکل مبهم (1^∞)را اختیار مینماید علاقه‌مند شوند.
روش های تدریس	سؤال و جواب، کارهای گروهی و انفرادی
مواد ممد درسی	چارت بخش ورودی
توضیح ورودی (5) دقیقه	بعد از داخل شدن به صنف و انجام کارهای مقدماتی تدریس به ارایهٔ درس جدید بپردازید، چارت شکل ورودی را در پیشروی صنف آویزان نموده و سؤال مربوط به آن را از شاگردان بپرسید. شاگردان را تشویق و رهنمایی نمایید تا جواب های درست را ارائه نمایند، در غیر آن سؤال مذکور را با وضع نمودن قیمت، که شکل مبهم (1^∞) را اختیار مینماید با استفاده از لوگاریتم طبیعی به شکل مبهم ($0.\infty$) تبدیل نموده و چون از دروس قبلی راه حل شکل مبهم($0.\infty$) را میدانیم؛ بنا بر این میتوانید از این طریق سؤال را حل نمایید.

فعالیت جریان درس: (28) دقیقه

معلم محترم شاگردان را به گروه های مناسب تقسیم نموده و فعالیت صفحهٔ 21 کتاب درسی را به آنها وظیفه دهید تا انجام دهند در وقت مشاهده از گروه‌ها، شاگردان را به سهیم شدن در فعالیت گروهی تشویق نمایید، بعد از انجام فعالیت از نمایندهٔ یک گروه بخواهید تا فعالیت انجام شدهٔ گروهی خویش را روی تخته توضیح نماید؛ اگر در کار گروهی انجام شده اشتباهی وجود داشت از همهٔ گروه های دیگر بخواهید تا کار های گروهی خویش را با آن مقایسه نمایند و آن را اصلاح نمایند. در ختم کار گروهی نتیجهٔ فعالیت را به شیوهٔ سؤال و جواب روی تخته توضیح و تشریح نمایید.

در اخیر یادداشت صفحهٔ 21 کتاب درسی را طوری که بخش I آن که به شکل جدول است با استفاده از کتاب به شاگردان تشریح نمایید و بخش II آن که حاوی چهار سؤال است دو سؤال آن را با سهم فعال شاگردان روی تخته ثبوت و مفصلاً تشریح نمایید.

تحکیم درس: (7) دقیقه

برای تحکیم درس سؤال سوم بخش دوم یادداشت صفحهٔ 22 کتاب درسی را به شاگردان وظیفه دهید تا در کتابچه‌های خویش به شکل انفرادی حل نموده و همزمان از یک شاگرد داوطلب بخواهید تا سؤال مذکور را روی تخته حل نماید. در اخیر از همهٔ شاگردان بخواهید تا سؤال حل شدهٔ کتابچه‌های خویش را با سؤال حل شدهٔ روی تخته مقایسه نمایند تا اگر اشتباهی در حل شان موجود باشد به اصلاح آن بپردازند.

(متوجه باشید تا شاگردان درجریان کار انفرادی از سؤال حل شدهٔ کتاب درسی استفاده ننمایند.)

ارزیابی ختم درس: (5) دقیقه

معلم محترم برای این که اطمینان حاصل نمایید شاگردان درس ارائه شده را خوب فرا گرفته اند یا خیر؟ از یک شاگرد داوطلب بخواهید تا سؤال چهارم صفحهٔ 23 کتاب درسی را روی تخته حل نماید و متباقی شاگردان نیز سهم فعال داشته باشند.

معلومات اضافی

به صورت عموم اشکال مبهم ($0^0, \infty^0, 1^\infty$) به طریقه‌های مختلف حل میگردند که معمولاً از لوگاریتم یا تساوی $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{nx} = e^x$ که معادله آن $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{x}{n})^n = e^x$ است در حل چنین اشکال مبهم استفاده میشود طوری که (e) اساس لوگاریتم طبیعی را تشکیل میدهد، همچنان از طریقهٔ هوپیتال نیز استفاده صورت میگیرد.

در این جا دو حالت (1^∞ ، ∞^0) ذکر شده است؛ ولی مثال از (0^0) ذکر نگردیده است؛ بنا بر این میتوان چند مثال را قرار ذیل برای معلومات بهتر شما ذکر نمود:

$$\lim_{x\to 0} x^x = ?$$

$$\lim_{x\to 0} x^x = 0^0 \qquad y = x^x \Rightarrow \log_e y = \log_e x^x$$

$$\because \log_e x^x = x \cdot \log_e^x$$

$$\lim_{x\to 0}\log_e y = \lim_{x\to 0}(x\cdot\log_e x) \Rightarrow \lim_{x\to 0}\ln y = \lim_{x\to 0}\underbrace{(x\ln x)}_{0.\infty}$$

$$\lim_{x\to 0}\ln y = \lim_{x\to 0}(\frac{\ln x}{\frac{1}{x}})$$

$$\because \lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \frac{\infty}{\infty}$$

حال:

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\ln y = \lim_{x\to 0}(\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}) = \lim_{x\to 0}(-x) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\ln y = 0 \Rightarrow \ln\lim_{x\to 0} y = 0$$

$$\lim_{x\to 0} y = e^0 = 1 \qquad \lim_{x\to 0} x^x = 1$$

فصل اول

عنوان درس: اشکال مبهم ($1^{\infty}, \infty^{0}, 0^{0}$)

صفحهٔ کتاب (24-23)

وقت تدریس: یک ساعت درسی(ساعت دوم درسی)

اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	• شاگردان طریقهٔ حل لیمیت تابعی که شکل مبهم (1^{∞}) را اختیار مینماید بفهمند. • شاگردان سؤال‌ها و مثال های مربوط به لیمیت تابع که شکل مبهم (1^{∞}) را اختیار مینماید حل کرده بتوانند. • شاگردان به حل سؤال‌ها و مثال های مربوط به لیمیت تابع که شکل مبهم (1^{∞}) را اختیار مینماید علاقه‌مندی پیدا نمایند.
روش های تدریس	سؤال و جواب، کارهای گروهی و انفرادی
مواد ممد درسی	مواد مورد نیاز
توضیح ورودی (5) دقیقه	بعد از داخل شدن به صنف و انجام کار های مقدماتی تدریس، به ارائهٔ درس جدید بپردازید؛ چون این درس به ادامهٔ درس قبلی است، میتوانید بخش ورودی درس قبلی را تکرار نمایید در غیر آن این حالت خاص لیمیت را به شکل سؤال از شاگردان بپرسید که آیا لیمیت یک تابع، شکل مبهم 1^{∞} را اختیار نموده میتواند یا خیر؟ سعی نمایید که از شاگردان جواب‌های قناعت بخش به دست آورید.

فعالیت جریان درس: (28) دقیقه

اول موضوع شکل عمومی مبهم (1^{∞}) صفحهٔ(23) کتاب درسی را روی تخته توضیح و تشریح نمایید؛ سپس شاگردان را به گروه های مناسب تقسیم نموده و آنها را وظیفه دهید تا مثال اول صفحهٔ(23) کتاب درسی را در گروه های شان با مشورهٔ هم حل نمایند و هم تمام شاگردان در انجام فعالیت سهم فعال داشته باشند. در ختم کار گروهی از نمایندهٔ یک گروه بخواهید تا کار گروهی خویش را روی تخته توضیح نماید اگر در توضیحات اشتباهی موجود نبود سایر شاگردان کار گروهی خویش را با کار روی تخته مقایسه نمایند تا اگر کدام اشتباه در کار ایشان موجود باشد آن را اصلاح نمایند.

تحکیم درس: (7) دقیقه

برای تحکیم درس به شاگردان وظیفه دهید تا مثال دوم صفحهٔ(23)کتاب درسی را به شکل انفرادی در کتابچه‌های شان حل نمایند(در حالی که از کتاب درسی استفاده ننمایند) همزمان از یک شاگرد داوطلب بخواهیدتا مثال مذکور را روی تخته حل نماید. در ختم کار انفرادی اگر حل روی تخته درست بود از همهٔ شاگردان بخواهید تا سؤال حل شدهٔ کتابچه‌های خویش را با سؤال حل شدهٔ روی تخته مقایسه نمایند تا اگر اشتباهی در حل ایشان موجود باشد آن را اصلاح نمایند.

ارزیابی ختم درس: (5) دقیقه

معلم محترم برای این که اطمینان حاصل نمائیدشاگردان درس ارائه شده را خوب فرا گرفته اند یا خیر؟ از یک شاگرد داوطلب بخواهید تا مثال سوم صفحهٔ(24) کتاب درسی را با سهم گیری فعال سایر شاگردان روی تخته حل نماید.

جواب به سؤال های تمرین

لیمیت‌های زیر را محاسبه نمایید.

1) $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{x+2}$ 2) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{\ln x}$

3) $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x+3}{x-1})^{x+2}$ 4) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n^2})^{n^2}$ 5) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{x}}$

حل:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{x+2}=(1+\frac{1}{\infty})^{\infty+2}=(1+0)^{\infty}=1^{\infty}$

$\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{x+2}=e^{p}$ $\quad P=\lim\limits_{x\to a}(v(u-1))$

$$\left.\begin{matrix}u=1+\frac{1}{x}\\ v=x+2\end{matrix}\right\}\Rightarrow P=\lim_{x\to\infty}\left[(x+2)\left((1+\frac{1}{x})-1\right)\right]=\lim_{x\to\infty}\left[(x+2)(\frac{1}{x})\right]=\lim_{x\to\infty}(\frac{x+2}{x})=\frac{1}{1}=1\Rightarrow P=1$$

$\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{x+2}=e^{P}=e^{1}=e$

2) $\lim\limits_{x\to 1}(\frac{x-1}{\ln x})=\frac{1-1}{\ln 1}=\frac{0}{0}$

نظر به قضیهٔ هوپیتال:

$$\lim_{x\to 1}(\frac{x-1}{\ln x})=\lim_{x\to 1}(\frac{x-1}{\ln x})'=\lim_{x\to 1}(\frac{(x-1)'}{(\ln x)'}=\lim_{x\to 1}(\frac{1}{\frac{1}{x}})=\lim_{x\to 1}x=1$$

و یا به طریقهٔ دیگر:

$$\left.\begin{matrix}x-1=y\\ x=y+1\\ x\to 1\\ y\to 0\end{matrix}\right\}\Rightarrow\lim_{x\to 1}(\frac{x-1}{\ln x})=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\ln(y+1)}=\lim_{y\to 0}\frac{\frac{y}{y}}{\frac{\ln(y+1)}{y}}=\lim_{y\to 0}\frac{1}{\frac{1}{y}\ln(1+y)}=\lim_{y\to 0}\frac{1}{\ln(1+y)^{\frac{1}{y}}}$$

$$=\frac{\lim\limits_{y\to 0}1}{\lim\limits_{y\to 0}\ln(1+y)^{\frac{1}{y}}}=\frac{1}{\ln\lim\limits_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}}}=\frac{1}{\ln e}=1$$

3) $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x+3}{x-1})^{x+2}=1^{\infty}$

$$\lim_{x\to\infty}(\frac{x+3}{x-1})^{x+2}=\lim_{x\to\infty}(\frac{x-1+4}{x-1})^{x+2}=\lim_{x\to\infty}(\frac{x-1}{x-1}+\frac{4}{x-1})^{x+2}=\lim_{x\to\infty}(1+\frac{4}{x-1})^{x+2}$$

$$=(1+\frac{4}{x-1})^{x+2}=(1+0)^{\infty}=1^{\infty}$$

$$P = \lim_{x \to a} [v(u-1)]$$

$$\left.\begin{array}{l} u = \dfrac{x+3}{x-1} \\ v = x+2 \end{array}\right\}$$

$$\lim_{x \to \infty} (\frac{x+3}{x-1})^{x+2} = e^P \qquad P = \lim_{x \to \infty} \left[(x+2)(\frac{x+3}{x-1} - 1) \right]$$

$$P = \lim_{x \to \infty} \left[(x+2)(\frac{x+3-(x-1)}{(x-1)}) \right] = \lim_{x \to \infty} \left[(x-2)(\frac{x+3-x+1}{(x-1)} \right] = \lim_{x \to \infty} \left[(x-2)(\frac{4}{(x-1)}) \right]$$

$$= \lim_{x \to \infty} \left[\frac{4(x-2)}{x-1} \right] = \lim_{x \to \infty} \frac{4x-8}{x-1}$$

$$\left.\begin{array}{l} m = 1 \\ n = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow m = n \Rightarrow \lim_{x \to \infty} \frac{4x-8}{x-1} = \frac{4}{1} = 4$$

$$P = 4 \Rightarrow \lim_{x \to \infty} (\frac{x+3}{x-1})^{x+2} = e^P = e^4$$

4) $\lim_{n \to \infty} (1 + \frac{1}{n^2})^{n^2}$

$$\lim_{n \to \infty} (1 + \frac{1}{n^2})^{n^2} = (1 + \frac{1}{\infty^2})^{\infty^2} = (1+0)^\infty = 1^\infty \rightarrow \lim_{n \to \infty} (1 + \frac{1}{n^2})^{n^2} = e^P$$

$$\left.\begin{array}{l} u = 1 + \dfrac{1}{n^2} \\ v = n^2 \end{array}\right\} \quad P = \lim_{n \to \infty} [v(u-1)]$$

$$P = \lim_{n \to \infty} \left[(n^2(1 + \frac{1}{n^2} - 1) \right] = \lim_{n \to \infty} (n^2 \frac{1}{n^2}) = \lim_{n \to \infty} 1 = 1 \Rightarrow P = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} (1 + \frac{1}{n^2}) n^2 = e^p = e^1 = e$$

نوت: این سؤال را بعد از مطالعهٔ لیمیت توابع مثلثاتی حل نمایید.

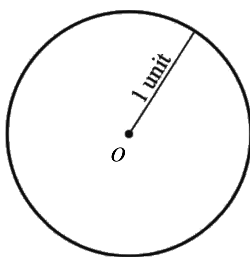
5) $\lim_{x \to 0} (\cos 2x)^{\frac{1}{x}} = (\cos 2 \cdot 0)^{\frac{1}{0}} = (\cos 0)^\infty = 1^\infty \qquad \lim_{x \to 0} (\cos 2x)^{\frac{1}{x}} = e^P$

$$\left.\begin{array}{l} u = \cos 2x \\ v = \dfrac{1}{x} \end{array}\right\} \quad P = \lim_{x \to 0} [v(u-1)]$$

$$P = \lim_{x \to 0} \left[\frac{1}{x} (\cos 2x - 1) \right] = \lim_{x \to 0} (\frac{\cos 2x - 1}{x}) = \lim_{x \to 0} (\frac{-(1 - \cos 2x)}{x}) = \lim_{x \to 0} (\frac{-2\sin^2 x}{x})$$

$$= \lim_{x \to 0} (\frac{-2\sin x \cdot \sin x}{x}) = -2 \lim_{x \to 0} \sin x \cdot \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = -2\sin 0 \cdot 1 = -2 \cdot 0 \cdot 1 = 0 \Rightarrow P = 0$$

$$\lim_{x \to 0} (\cos 2x)^{\frac{1}{x}} = e^p = e^0 = 1$$



فصل اول

عنوان درس: لیمیت توابع مثلثاتی

صفحهٔ کتاب (26-25)

وقت تدریس(دو ساعت درسی) ساعت اول درسی

اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	• شاگردان مفهوم لیمیت توابع مثلثاتی را بفهمند. • شاگردان قضیهٔ $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ را ثبوت کرده بتوانند. • شاگردان سؤال‌ها و مثال های مربوط به لیمیت توابع مثلثاتی را حل کرده بتوانند. • شاگردان به حل سؤال‌ها و مثال های مربوط به لیمیت توابع مثلثاتی علاقه‌مندی پیدا نمایند.
روش های تدریس	سؤال و جواب، کارهای گروهی و انفرادی
مواد ممد درسی	چارت بخش ورودی
توضیح ورودی (5) دقیقه	بعد از داخل شدن به صنف و انجام کار های مقدماتی تدریس، به ارائهٔ درس جدید بپردازید، چارت شکل ورودی را پیشروی صنف آویزان نموده و سؤال مربوط آن را از شاگردان بپرسید، آنها را تشویق نمایید تا جواب های درست را ارائه نمایند در غیر آن قرار ذیل تعریف نمایید: دایره‌یی که شعاع آن یک واحد باشد به نام دایرهٔ مثلثاتی یاد میگردد.

فعالیت جریان درس: (28) دقیقه

شاگردان رابه گروه های مناسب تقسیم نموده و آنها را وظیفه دهید تا فعالیت صفحهٔ(25)کتاب درسی را انجام دهند، در جریان کارگروهی از گروه‌ها نظارت به عمل آرید تا تمام شاگردان به صورت فعال سهم داشته باشند؛ اگر در اجرای فعالیت به مشکلی رو به رو شدند آنها را رهنمایی نمایید. در ختم فعالیت از نمایندهٔ یک گروه بخواهید تا فعالیت انجام شدهٔ گروهی خویش را روی تخته توضیح نماید؛ اگر کار گروهی درست انجام شده بود از همهٔ گروه های دیگر بخواهید تا کارهای گروهی خویش را به آن مقایسه نمایند تا اگر کدام اشتباهی در کار ایشان موجود باشد به اصلاح آن بپردازند؛ سپس با استفاده از شکل رسم شده، قضیهٔ صفحهٔ(25)کتاب درسی رابه شکل سؤال و جواب مرحله به مرحله روی تخته ثبوت و توضیح نمایید.

تحکیم درس: (7) دقیقه

برای تحکیم درس مثال اول صفحهٔ(26)کتاب درسی را توسط یک شاگرد داوطلب روی تخته حل نموده و همزمان به شاگردان دیگر وظیفه دهید تا مثال مذکور را در کتابچه‌های خویش به شکل انفرادی حل نمایند. متوجه باشید تا شاگردان در جریان کارانفرادی از حل کتاب استفاده ننمایند. در ختم کار انفرادی اگر حل سؤال روی تخته درست بود از همهٔ شاگردان بخواهید تا سؤال حل شدهٔ کتابچه‌های خویش را با سؤال حل شدهٔ روی تخته مقایسه نمایند تا اگر اشتباهی در حل شان موجود باشد به اصلاح آن بپردازند.

ارزیابی ختم درس: (5) دقیقه

معلم محترم برای این که اطمینان حاصل نمایید آیا شاگردان درس ارائه شده را خوب فرا گرفته اند یا خیر؟ چند سؤال را قرار ذیل از آنها بپرسید:

- چه وقت لیمیت نسبت ساین یک زاویه برخود زاویه مساوی به یک است؟
- چه وقت لیمیت نسبت ساین یک زاویه برخود زاویه مساوی به صفر است؟

معلومات اضافی

برای معلومات اضافی قابل تذکر است:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{bx}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\sin bx}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan ax}{bx}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\tan bx}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan ax}{\tan bx}=\frac{a}{b}$$

در صورتی که $b\neq 0$ باشد.

همچنان: $\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{bx}=\lim_{x\to 0}\frac{ax}{\sin bx}=\frac{a}{b}$

ثبوت $\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{bx}$ در کتاب موجود است که به شکل $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ آمده است، ثبوت بعضی دیگر آن قرار ذیل است:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\sin bx}=\lim_{x\to 0}\frac{ax\cdot\frac{\sin ax}{ax}}{bx\cdot\frac{\sin bx}{bx}}=\frac{a\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{ax}}{b\lim_{x\to 0}\frac{\sin bx}{bx}}=\frac{a\cdot 1}{b\cdot 1}=\frac{a}{b}$$

ثبوت حالت دیگر آن قرار ذیل است:

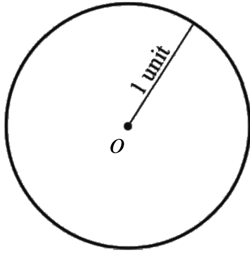
$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan ax}{bx}=\lim_{x\to 0}\frac{ax}{\tan bx}=\frac{a}{b}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{ax}{\tan bx}=\lim_{x\to 0}\frac{ax}{\frac{\sin bx}{\cos bx}}=\lim_{x\to 0}(ax\cdot\frac{\cos bx}{\sin bx})=\lim_{x\to 0}(\frac{ax}{\sin bx}\cdot\cos bx)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{ax}{\sin bx}\cdot\lim_{x\to 0}\cos bx=\frac{a}{b}\cdot 1=\frac{a}{b}$$

حالت‌های دیگر آن قرار فوق ثبوت میگردند.

فصل اول



عنوان درس: لیمیت توابع مثلثاتی

صفحهٔ کتاب (28-27)

وقت: ساعت دوم درسی

اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	• شاگردان مفهوم لیمیت توابع مثلثاتی را بفهمند. • شاگردان سؤال‌ها و مثال های مربوط به لیمیت توابع مثلثاتی را حل کرده بتوانند. • شاگردان به حل سؤال‌ها و مثال‌های مربوط به لیمیت توابع مثلثاتی علاقه‌مندی پیدا نمایند.
روش های تدریس	سؤال و جواب، کارهای گروهی و انفرادی
مواد ممد درسی	مواد مورد نیاز
توضیح ورودی (5) دقیقه	بعد از داخل شدن به صنف و انجام کار های مقدماتی تدریس، به ارائهٔ درس جدید بپردازید؛ چون این درس به امتداد درس قبلی است، ادامهٔ بخش ورودی درس قبلی را تکرار نمایید و اگر مشکلات در درس قبلی موجود بود در مورد رهنمایی نمایید.

فعالیت جریان درس: (28) دقیقه

شاگردان رابه گروه های مناسب تقسیم نموده و آنها را وظیفه دهید مثال دوم صفحهٔ(27)کتاب درسی را در گروه های شان با مشورهٔ یکدیگر حل نمایند، در جریان کارگروهی از گروه‌ها نظارت به عمل آرید تا تمام شاگردان به صورت فعال سهم داشته باشند، اگر در اجرای فعالیت، آنها به مشکلی رو به رو شدند رهنمایی نمایید. در ختم فعالیت از نمایندهٔ یک گروه بخواهید تا فعالیت انجام شدهٔ گروهی خویش را روی تخته توضیح نماید، در صورتی‌که فعالیت انجام شده کاملاً درست باشد از همهٔ گروه‌ها بخواهیدتا کارهای گروهی خویش را با حل روی تخته مقایسه نمایند تا اگر اشتباهی در کار آنها موجود باشد به اصلاح آن بپردازند؛ سپس مثال سوم صفحهٔ(27)کتاب درسی را روی تخته با سهم گیری فعال شاگردان حل نموده و توضیح نمایید.

تحکیم درس: (7) دقیقه

برای تحکیم درس مثال چهارم صفحهٔ(27)کتاب درسی را توسط یک شاگرد داوطلب روی تخته حل نموده و همزمان به شاگردان دیگر وظیفه دهید تا مثال مذکور را در کتابچه‌های خویش به شکل انفرادی حل نمایند در ختم کارانفرادی اگر در حل روی تخته مشکلی موجود نبود از همه شاگردان بخواهید تا سؤال حل شدهٔ کتابچه‌های خویش را با سؤال حل شدهٔ تخته مقایسه نمایند تا اگر اشتباهی در حل شان موجود باشد به اصلاح آن بپردازند.

ارزیابی ختم درس: (5) دقیقه

معلم محترم برای این که مطمئن شوید آیا شاگردان درس ارائه شده را خوب فرا گرفته اند یا خیر؟ از یک شاگرد داوطلب بخواهید تا مثال پنجم صفحهٔ 27 کتاب درسی را روی تخته با سهم گیری فعال شاگردان حل نماید.

معلومات اضافی

توجه: قابل تذکر است که در لیمیت توابع مثلثاتی که شکل مبهم $\frac{0}{0}$ را اختیار مینمایند دو حالت در نظر گرفته میشود:

1. اگر متحول به عدد غیر صفر؛ مانند a تقرب نماید آنگاه تعویض $u = x = a$ مناسب خواهد بود.
2. اگر متحول به ∞ تقرب نماید تعویض $u = \frac{1}{x}$ مناسب خواهد بود.

ولی در هر صورت تعویض را طوری در نظر میگیریم که متحول جدید به طرف صفر تقرب نماید.

جواب به سؤال های تمرین

لیمیت‌های زیر را محاسبه کنید.

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(x+\frac{\pi}{6})}{x+\frac{\pi}{6}}$ 2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x}$ 3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{1+\tan^2 x}$

4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x}$ 5) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{\sin 3x}$ 6) $\lim\limits_{x\to 0}\sin 5x\cos 3x$

7) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan(2x-1)}{4x^2-1}$ 8) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{\cos 2x-\cos x+1}$ 9) $\lim\limits_{x\to 1}(\cos^2 x+\sin^2 x)$

حل:

$$1)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x+\frac{\pi}{6})}{x+\frac{\pi}{6}}=\frac{\sin(0+\frac{\pi}{6})}{0+\frac{\pi}{6}}=\frac{\sin\frac{\pi}{6}}{\frac{\pi}{6}}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\pi}{6}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{6}{\pi}=\frac{3}{\pi}$$

$$2)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\cdot\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\sin x=1\cdot\sin 0=1\cdot 0=0$$

$$3)\ \lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\tan^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{1}{\cos^2 x}}$$
$$=\lim_{x\to 0}\cos^2 x=\lim_{x\to 0}(\cos x\cdot\cos x)$$
$$=\lim_{x\to 0}\cos x\cdot\lim_{x\to 0}\cos x=\cos 0^0\cdot\cos 0^0=1\cdot 1=1$$

$$4)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x}=\lim_{x\to 0}(\frac{\sin x}{x}-\frac{x}{x})=\lim_{x\to 0}(\frac{\sin x}{x}-1)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}-\lim_{x\to 0}1=1-1=0$$

$$5)\ \lim_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{\sin 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 2x}{\cos 2x}}{\sin 3x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{\cos 2x}\cdot\frac{1}{\sin 3x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{\cos 2x}\cdot\frac{2x}{2x}\cdot\frac{1}{\sin 3x}\cdot\frac{3x}{3x}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{2x}\cdot\frac{2x}{3x\cos 2x}\cdot\frac{3x}{\sin 3x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{2}{3\cos 2x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{3x}{\sin 3x}$$

$$=\frac{2}{2}\cdot\frac{2}{3\cos 0}\cdot\frac{3}{3}=1\cdot\frac{2}{3\cdot 1}\cdot 1=\frac{2}{3}$$

$$6)\ \lim_{x\to 0}(\sin 5x\cos 3x)=\lim_{x\to 0}\sin 5x\cdot\lim_{x\to 0}\cos 3x=\sin(5\cdot 0)\cdot\cos(3\cdot 0)=\sin 0^\circ\cos 0^\circ=0\cdot 1=0$$

$$\lim_{x\to 0}(\sin 5x\cdot\cos 3x)=\lim_{x\to 0}\sin 5x\cdot\lim_{x\to 0}\cos 3x=0\cdot 1=0$$

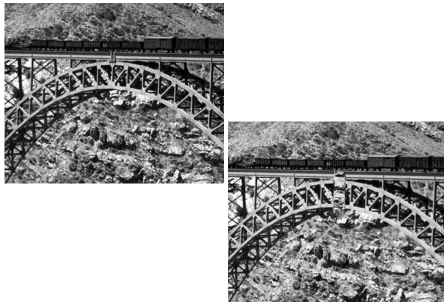
$$7)\ \lim_{x\to 0}\frac{\tan(2x-1)}{4x^2-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan(2x-1)}{(2x-1)(2x+1)}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan(2x-1)}{(2x-1)}\cdot\frac{1}{2x+1}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\tan(2x-1)}{(2x-1)}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{2x+1}=1\cdot\frac{1}{2\cdot 0+1}=1\cdot\frac{1}{1}=1$$

$$8)\ \lim_{x\to 0}\sqrt{\cos 2x-\cos x+1}=\sqrt{\lim_{x\to 0}(\cos 2x-\cos x+1)}=\sqrt{\lim_{x\to 0}\cos 2x-\lim_{x\to 0}\cos x+\lim_{x\to 0}1}$$

$$=\sqrt{\cos 0^\circ-\cos 0^\circ+1}=\sqrt{1-1+1}=\sqrt{1}=1$$

$$9)\ \lim_{x\to 1}(\cos^2 x+\sin^2 x)=\lim_{x\to 1}1=1$$



فصل اول

عنوان درس: متمادیت توابع

صفحهٔ کتاب (30-29)

وقت تدریس(دوساعت درسی) ساعت اول درسی

اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	• شاگردان مفهوم متمادیت توابع را بفهمند. • شاگردان سؤال‌ها و مثال های مربوطه به متمادیت توابع را حل کرده بتوانند. • شاگردان به حل سؤال‌ها و مثال های مربوطه به متمادیت توابع علاقه‌مندی پیدا نمایند.
روش های تدریس	سؤال و جواب، کارهای گروهی و انفرادی
مواد ممد درسی	چارت بخش ورودی
توضیح ورودی (5) دقیقه	بعد از داخل شدن به صنف و انجام کارهای مقدماتی تدریس، به ارائهٔ درس جدید بپردازید چارت شکل ورودی را در مقابل صنف آویزان نموده و سؤال مربوطه به آن را از شاگردان بپرسید و آنها را تشویق و رهنمایی نمایید تا جواب های درست ارائه نمایند. در غیر آن تشریحات لازم ذیل را برای شان ارائه نمایید. پُل در قسمت وسطی شکسته گی دارد که به دو قسمت تقسیم شده است، که قسمت شکسته گی اول و دوم را از هم جدا می‌سازد بنا بر آن می توان گفت که پُل متصل نیست، بلکه در قسمت وسطی منفصل یا غیر متمادی است.

فعالیت جریان درس: (28) دقیقه

شاگردان رابه گروه های مناسب تقسیم نموده و فعالیت صفحهٔ(29)کتاب درسی را به آنها وظیفه دهید تا در گروه های شان به مشورهٔ هم انجام دهند، در جریان کارگروهی از گروه‌ها نظارت به عمل آورید تا همهٔ شاگردان به صورت فعال سهم داشته باشند؛ اگر در اجرای فعالیت به مشکلی رو به رو شدند آنها را رهنمایی نمایید. در ختم فعالیت از نمایندهٔ یک گروه بخواهید تا فعالیت انجام شده گروهی خویش را روی تخته توضیح نماید. در صورتیکه توضیحات نمایندهٔ گروه درست بود از همهٔ گروه‌ها بخواهید تا کارهای گروهی خویش را با کارتخته مقایسه نمایند تا اگر اشتباهی در کارشان موجود باشد به اصلاح آن بپردازند. در ختم فعالیت نتیجهٔ آن را به شکل سؤال و جواب به شاگردان توضیح نمایید.

بعد مثال اول صفحهٔ(30)کتاب درسی را با سهم گیری فعال شاگردان روی تخته حل نمایید.

تحکیم درس: (7) دقیقه

برای تحکیم درس، مثال دوم صفحهٔ(30)کتاب درسی را توسط یک شاگرد داوطلب روی تخته حل نموده و همزمان به شاگردان دیگر وظیفه دهید تا مثال مذکور را در کتابچه‌های خویش به شکل انفرادی حل نمایند.متوجه باشید که شاگردان در جریان کارانفرادی از حل کتاب استفاده ننمایند. در اخیر از همهٔ شاگردان بخواهید تا سؤال حل شدهٔ کتابچه‌های خویش را با سؤال حل شدهٔ روی تخته مقایسه نمایندتا اگر اشتباهی در حل شان موجود باشد آن را اصلاح نمایند.

ارزیابی ختم درس: (5) دقیقه

برای این که مطمئن شوید آیا شاگردان درس ارائه شده را خوب فهمیده اند یا خیر؟ از یک شاگرد داوطلب بخواهید که با سهم گیری فعال شاگردان دیگر مثال سوم صفحهٔ(30) کتاب درسی را روی تخته حل نماید.

معلومات اضافی

اگر تابع زینه‌یی، شاخه‌یی و یا قیمت مطلقه باشد، موجودیت لیمیت تابع باید توسط لیمیت دو طرف آن اثبات گردد.

تابع مثلثاتی $g(x)=\cos x, f(x)=\sin x$ در هر نقطه متمادی است طوری که اگر a عدد حقیقی و دلخوا فرض شود ؛ بنا بر این:

$$\lim_{x\to a} g(x)=\lim_{x\to a}\cos x=\cos a \qquad \lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a}\sin x=\sin a$$

چون: $g(a)=\cos a$ ، $f(a)=\sin a$

بنا بر این: $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$ و $\lim_{x\to a} g(x)=g(a)$ است؛ پس هر دو تابع متمادی اند.

متمادیت یک طرفه

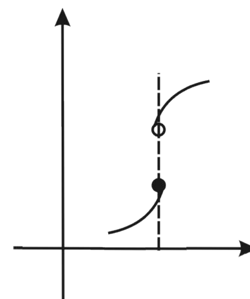
تعریف متمادیت چپ تابع در یک نقطه:

هرگاه $\lim_{x\to a^-} f(x)=f(a)$ باشد میتوان گفت که تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x=a$ از سمت چپ متمادی است.

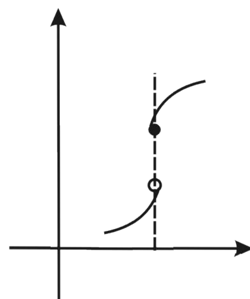
تعریف متمادیت راست تابع در یک نقطه:

اگر $\lim_{x\to a^+} f(x)=f(a)$ باشد میتوان گفت که تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x=a$ از سمت راست متمادی است.

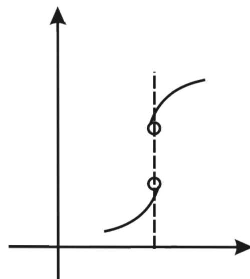
گراف‌های زیر برای درک شهودی متمادیت راست وچپ توابع کمک مینمایند:



تابع در نقطهٔ $x=a$ متمادیت سمت چپ دارد.



تابع در نقطهٔ $x=a$ متمادیت سمت راست دارد.



تابع در نقطهٔ $x=a$ نه متمادیت سمت راست و نه متمادیت سمت چپ دارد.



فصل اول

عنوان درس: متمادیت توابع

صفحهٔ کتاب (32-31)

وقت تدریس: ساعت دوم درسی

اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	• شاگردان مفهوم غیر متمادیت توابع را بفهمند. • شاگردان سؤال های و مثال های مربوط به غیرمتمادیت توابع راحل کرده بتوانند. • شاگردان به حل سؤال های و مثال های مربوط به غیرمتمادیت توابع علاقه‌مند شوند.
روش های تدریس	سؤال و جواب، کارهای گروهی و انفرادی
مواد ممد درسی	مواد مورد نیاز
توضیح ورودی (5) دقیقه	بعد از داخل شدن به صنف و انجام کار های مقدماتی تدریس، به ارائهٔ درس جدید بپردازید؛ چون این درس به ادامهٔ درس قبلی است، میتوانید بخش ورودی درس قبلی را تکرار نمایید.

فعالیت جریان درس: (28) دقیقه

معلم محترم شاگردان رابه گروه های مناسب تقسیم نموده و مثال چهارم صفحهٔ(31)کتاب درسی را به آنها وظیفه دهید تا در گروه های شان با مشورهٔ یکدیگر حل نمایند. توجه شود تا ازحل کتاب درسی استفاده ننمایند. در جریان کارگروهی از گروه‌ها نظارت به عمل آرید و شاگردان را تشویق نمایید تا همه در کار گروهی سهم فعال داشته باشند. در ختم کارگروهی از نمایندهٔ یک گروه بخواهید تا کارگروهی خویش را روی تخته توضیح نماید. درصورتی که کار گروهی درست انجام شده بود ازهمهٔ گروه های متباقی بخواهید تا کار های گروهی خویش را با آن مقایسه نمایند. تا اگر اشتباهی در کار شان موجود باشد آن را اصلاح نمایند؛ سپس نتیجهٔ فعالیت مذکور که در صفحهٔ(31) کتاب درسی موجود است به شکل سؤال و جواب روی تخته توضیح و تشریح نمایید.

تحکیم درس: (7) دقیقه

برای تحکیم درس مثال پنجم صفحهٔ(31) کتاب درسی را توسط یک شاگرد داوطلب روی تخته حل نموده و همزمان به شاگردان دیگر وظیفه دهید تا مثال مذکور را در کتابچه‌های خویش به شکل انفرادی حل نمایند. توجه صورت گیرد تا شاگردان در جریان کارانفرادی از حل کتاب استفاده ننمایند. اگر حل سؤال روی تخته درست بود از تمام شاگردان بخواهیدتا سؤال حل شدهٔ کتابچه‌های خویش را با سؤال حل شدهٔ روی تخته مقایسه نمایند تا اگر اشتباهی در کار شان موجود باشد به اصلاح آن بپردازند.

ارزیابی ختم درس: (5) دقیقه

برای این که مطمئن شوید شاگردان درس ارائه شده را خوب فرا گرفته اند یا خیر؟ موضوع غیر متمادیت صفحهٔ(31) کتاب درسی رابه شکل سؤال و جواب از شاگردان بپرسید و جوابهای مناسب به دست آرید.

معلومات اضافی

متمادیت تابع در یک انتروال

تعریف متمادیت تابع در انتروال نیمه باز $[a,b)$ **:**

تابع $f(x)$ در انتروال نیمه باز $[a,b)$ متمادی است اگر و تنها اگر:

الف) در نقطهٔ a از سمت راست متمادی باشد.

ب) در انتروال باز (a,b) متمادی باشد.

تعریف متمادیت تابع در انتروال نیمه باز $(a,b]$ **:**

تابع $f(x)$ در انتروال نیمه باز $(a,b]$ متمادی است اگر و تنها اگر:

الف) در نقطهٔ b از سمت چپ متمادی باشد.

ب) در انتروال باز (a,b) متمادی باشد.

تعریف متمادیت تابع در انتروال بسته $[a,b]$ **:**

تابع $f(x)$ در انتروال بسته $[a,b]$ متمادی است اگر و تنها اگر:

الف) در نقطهٔ a از سمت راست متمادی باشد.

ب) در نقطهٔ b از سمت چپ متمادی باشد.

ج) در انتروال باز (a,b) متمادی باشد.

توجه: اگر تابع در یک انتروال متمادی باشد؛ بنا بر این در هر انتروال فرعی آن نیز متمادی است.

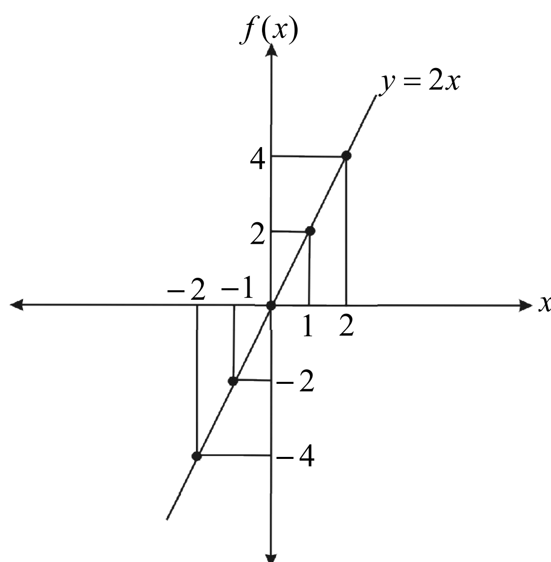
جواب به سؤال های تمرین

1- به ذوق خود یک تابع ر ا بنویسید، بعد گراف تابع مذکور را رسم کنید و ساحهٔ تعریف آن را معلوم کنید؛ سپس متمادیت آن را نشان دهید.

حل: طور مثال اگر تابع $y=2x$ را در نظر بگیریم داریم که:

$$y=f(x)=2x$$

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-4	-2	0	2	4



$$Dom f(x)=IR$$

نظر به گراف دیده می‌شود که تابع در تمام نقاط متمادی است؛ مثلاً اگر نقطهٔ $x=4$ را در نظر بگیریم داریم که:

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=2x \;\Rightarrow\; f(4)=2\cdot 4=8 \\ \lim\limits_{x\to 4} f(x)=\lim\limits_{x\to 4} 2x=2\cdot 4=8 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 4} f(x)=f(4)$$

بنا بر این تابع مذکور در این نقطه متمادی است.

2- به توابع زیر دقت کنید و نشان دهید که آیا توابع در نقاط داده شده، متمادی اند یا غیر متمادی؟

$a)\; f(x)=x^2+5(x-2)^7 \quad ; \quad x=3$

$b)\; f(x)=\dfrac{x+3}{(x^2+2x-5)} \quad ; \quad x=-1$

$c)\; h(x)=\dfrac{\sqrt{8-x^2}}{2x^2-5} \quad ; \quad x=-2$

$d)\; f(x)=\dfrac{1}{(x-3)^3} \quad ; \quad x=3$

$e)\; f(x)=|x-3| \quad ; \quad x=3$

$f)\; g(x)=\dfrac{|x|}{x} \quad ; \quad x=0$

$g)\; f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^3+x}{x} & ; \; x\neq 0 \\ 3 & ; \; x=2 \end{cases}$

$h)\; f(x)=\dfrac{x^2-9}{x+3} \quad ; \quad x=2$

حل:

$a)\; f(x)=x^2+5(x-2)^7 \quad ; \quad x=3$

$$f(3)=(3)^2+5(3-2)^7=9+5(1)^7=9+5=14$$

$$\lim_{x\to 3} f(x)=\lim_{x\to 3}(x^2+5(x-2)^7)=3^2+5(3-2)^7=9+5(1)^7=9+5=14 \;\Rightarrow\; \lim_{x\to 3} f(x)=f(3)$$

$$b)\ f(x)=\frac{x+3}{(x^2+2x-5)} \quad ; \quad x=-1$$

$$f(-1)=\frac{-1+3}{(-1)^2+2(-1)-5}=\frac{2}{1-2-5}=\frac{2}{-6}=-\frac{1}{3}$$

$$\lim_{x\to-1}\frac{x+3}{x^2+2x-5}=\frac{\lim\limits_{x\to-1}(x+3)}{\lim\limits_{x\to-1}(x^2+2x-5)}=\frac{-1+3}{(-1)^2+2(-1)-5}=\frac{2}{1-2-5}=-\frac{2}{-6}=-\frac{1}{3}$$

$$\lim_{x\to-1}\frac{x+3}{x^2+2x-5}=f(a)$$

بنا بر آن: a,b متمادی است.

$$c)\ h(x)=\frac{\sqrt{8-x^2}}{2x^2-5} \quad ; \quad x=-2$$

$$h(-2)=\frac{\sqrt{8-(-2)^2}}{2(-2)^2-5}=\frac{\sqrt{8-4}}{2(4)-5}=\frac{\sqrt{4}}{8-5}=\frac{\sqrt{4}}{3}=\frac{2}{3}$$

$$\lim_{x\to-2}\frac{\sqrt{8-x^2}}{2x^2-5}=\frac{\lim\limits_{x\to-2}\sqrt{8-x^2}}{\lim\limits_{x\to-2}(2x^2-5)}=\frac{\sqrt{\lim\limits_{x\to-2}(8-x)^2}}{2(-2)^2-5}=\frac{\sqrt{8-4}}{2(4)-5}=\frac{\sqrt{4}}{3}=\frac{2}{3}$$

$$\lim_{x\to-2}h(x)=h(-2)$$

بنا بر این c متمادی است.

$$d)\ f(x)=\frac{1}{(x-3)^3} \quad ; \quad x=3$$

$$f(3)=\frac{1}{(3-3)^3}=\frac{1}{(0)^3}=\infty$$

چون تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x=3$ تعریف نشده است؛ بنا بر این d متمادی نیست.

$$e)\ f(x)=|x-3| \quad ; \quad x=3$$

$$f(3)=|3-3|=|0|=0$$

$$\lim_{x\to3^+}f(x)=\lim_{x\to3^+}|3-3|=|3-3|=|0|=0$$

$$\lim_{x\to3^-}f(x)=\lim_{x\to3^-}|3-3|=-|3-3|=-|0|=0$$

$$\lim_{x\to3^+}f(x)=\lim_{x\to3^-}f(x)=0 \ \Rightarrow \lim_{x\to3}f(x)=0 \ \Rightarrow \lim_{x\to3}f(x)=f(3)$$

$$f)\ g(x)=\frac{|x|}{x} \quad ; \quad x=0$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to0^+}\frac{|x|}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{x}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}1=1\\ \lim\limits_{x\to0^-}\frac{|x|}{x}=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{-x}{x}=\lim\limits_{x\to0^-}-1=-1\end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to0^+}g(x)\neq\lim_{x\to0^-}g(x)$$

پس تابع در نقطهٔ $x=0$ متصل نیست؛ زیرا لیمیت آن در $x=0$ موجود نمی باشد.

چون لیمیت تابع موجود نیست؛ بنا بر این متمادی نیست.

$$g)\ f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3+x}{x} & ;\quad x\neq 0\\ 3 & ;\quad x=2\end{cases}$$

$$f(x)=\frac{x^3+x}{x}=\frac{x(x^2+1)}{x}=x^2+1$$

$$\lim_{x\to 2}(x^2+1)=2^2+1=4+1=5 \qquad f(x)=2^2+1=4+1=5$$

$$h)\ f(x)=\frac{x^2-9}{x+3} \qquad ;\quad x=2$$

$$f(x)=\frac{x^2-9}{x+3}=\frac{x^2-3^2}{x+3}=\frac{(x-3)(x+3)}{(x+3)}=(x-3)$$

$$f(x)=x-3$$

$$f(2)=2-3=-1$$

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}(x-3)=2-3=-1$$

بنا بر این تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x=2$ متمادی است.

$$(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$$
$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$
$$(f \div g)(x) = f(x) \div g(x) \quad , \; g(x) \neq 0$$

فصل اول

عنوان درس: خواص توابع متمادی

صفحهٔ کتاب (36-33)

وقت تدریس(یک ساعت درسی)

اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	• شاگردان خواص توابع متمادی را بفهمند. • شاگردان سؤال‌ها و مثال های مربوط به خواص توابع متمادی را حل کرده بتوانند. • شاگردان به حل سؤال‌ها و مثال های مربوط به خواص توابع متمادی علاقه‌مند شوند.
روش های تدریس	سؤال و جواب، کارهای گروهی و انفرادی
مواد ممد درسی	چارت بخش ورودی
توضیح ورودی **(5) دقیقه**	بعد از داخل شدن به صنف و انجام کارهای مقدماتی تدریس، به ارائهٔ درس جدید بپردازید، چارت شکل ورودی را در مقابل صنف آویزان نموده و سؤال مربوط به آن را از شاگردان بپرسید و آنها را تشویق و رهنمایی نمایید تا جواب های درست را ارائهٔ نماینددر غیر آن میتوانید چنین تشریحات لازم را به آنها ارائه نمایید: هرگاه دو تابع(f) و(g) متمادی باشند حاصل جمع، حاصل تفریق، حاصل ضرب و حاصل تقسیم این دو تابع باز هم توابع متمادی اند.

فعالیت جریان درس: (28) دقیقه

شاگردان رابه گروه های مناسب تقسیم نموده و فعالیت صفحهٔ(33)کتاب درسی رابه آنها وظیفه دهید تا در گروه های شان به مشورهٔ هم انجام دهند. در جریان فعالیت از کار گروهی شاگردان نظارت به عمل آورده و همهٔ آنها را تشویق نمایید تا در کار گروهی سهم فعال داشته باشند. در ختم فعالیت از نمایندهٔ یک گروه بخواهید تا فعالیت انجام شدهٔ گروهی خویش را روی تخته توضیح نماید، هرگاه کار گروهی درست انجام شده بود از همهٔ گروه های متباقی بخواهید تا کارهای گروهی خویش را با حل تخته مقایسه نمایند و اشتباه خویش را اصلاح کنند؛ سپس نتیجهٔ این فعالیت را به روش سؤال و جواب به شاگردان روی تخته توضیح و تشریح نمایید.

در اخیر بخش اول مثال اول صفحهٔ(33) کتاب درسی را با سهم گیری فعال شاگردان روی تخته حل و توضیح نمایید.

تحکیم درس: (7) دقیقه

برای تحکیم درس، بخش دوم مثال اول صفحهٔ(34-33) کتاب درسی را به شاگردان وظیفه دهید تا به شکل انفرادی در کتابچه‌های خویش حل نموده و همزمان از یک شاگرد داوطلب بخواهید تا مثال مذکور را روی تخته حل نماید. توجه شود تا در جریان کار انفرادی شاگردان از سؤال حل شدهٔ کتاب استفاده ننمایند. در ختم کار انفرادی اگر در

حل تخته اشتباهی وجود داشت از یک شاگرد داوطلب دیگر بخواهید تا آن را اصلاح نماید، زمانی که مطمئن شدید که حل تخته درست است از همهٔ شاگردان بخواهید تا سؤال حل شدهٔ کتابچه‌های خویش را با سؤال حل شدهٔ روی تخته مقایسه نمایند تا اگر اشتباهی در کار شان موجود باشد به اصلاح آن بپردازند.

ارزیابی ختم درس: (5) دقیقه

معلم محترم برای این که مطمئن شوید آیا شاگردان درس ارائه شده را خوب فرا گرفته اند یا خیر؟ از یک شاگرد داوطلب بخواهید تا مثال دوم صفحهٔ(35)کتاب درسی را روی تخته حل نماید.

معلومات اضافی

1. حاصل جمع چند تابع متمادی در یک نقطه، در آن نقطه متمادی است.
2. حاصل ضرب چند تابع متمادی در یک نقطه، در آن نقطه متمادی است.
3. اگر توابع(f)و(g)در نقطهٔ($x=a$) متمادی باشند و $g(a)\neq 0$ باشد؛ بنا بر این حاصل تقسیم این توابع($\frac{f}{g}$) در ($x=a$)متمادی است.
4. اگر تابع(f)در نقطهٔ($x=a$) و تابع(g) در نقطهٔ $f(a)$ متمادی باشند؛ بنا براین تابع($g\cdot f$) در نقطهٔ ($x=a$) متمادی است و همچنین می‌توان گفت که اگر تابع(g) در نقطهٔ ($x=b$)و تابع(f) درنقطهٔ $g(b)$ متمادی باشد بنا بر این($g\cdot f$) در نقطه($x=b$) متمادی است.
5. اگر تابع (f) در یک فاصله معین، متمادی و برای هر (x)در این فاصله $f(x)\geq 0$ باشد؛ بنا بر این تابع($y=\sqrt{f(x)}$) در این فاصله متمادی است.

فقط در مورد ($f\cdot g$) خواص متمادیت توابع را ثبوت مینماییم بقیه به عین شکل ثبوت میگردد؛ چون (f) و (g)توابع متمادی اند؛ بنا بر این:

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a) \quad ، \quad \lim_{x\to a} g(x)=g(a)$$

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)\cdot g(x)\right]=\lim_{x\to a} f(x)\cdot\lim_{x\to a} g(x)=f(a)\cdot g(a) \;\Rightarrow\; \lim_{x\to a}(f(x)\cdot g(x))=f(a)\cdot g(a)$$

توجه: اگر دو تابع f و g در نقطهٔ $x=a$ متمادی نباشند، به صورت عموم حالت $(f+g)$، $(f-g)$، $(f\cdot g)$ و $\frac{f}{g}$ در نقطهٔ $x=a$ مشخص نیست، ممکن است این توابع در این نقطه متمادی و یا هم غیر متمادی باشند.

جواب به سؤال های تمرین

بخش اول: نشان دهید که در نقاط داده شده توابع زیر متمادی اند:

$$1)\ f(x)=x^3-2(x+1)^5 \qquad ; \quad x=2$$

$$2)\ g(x)=\frac{x^2+3}{(x^2-x+5)(x^2+2x)} \qquad ; \quad x=-1$$

$$3)\ h(x)=\frac{x\sqrt{x}+1}{(x+2)^3} \qquad ; \quad x=4$$

حل:

$$1)\ f(x)=x^3-2(x+1)^5 \qquad ; \quad x=2$$

$$\left.\begin{matrix} g(x)=x^3 \\ h(x)=2(x+1)^5 \end{matrix}\right\}$$

$$g(2)=2^3=8$$

$$\lim_{x\to 2} g(x)=\lim_{x\to 2}(x^3)=2^3=8 \ \Rightarrow\ \lim_{x\to 2} g(x)=g(2)$$

بنا بر این تابع $g(x)$ در $x=2$ متمادی است.

$$h(2)=2(2+1)^5=2(3)^5=2(243)=486$$

$$\lim_{x\to 2} h(x)=\lim_{x\to 2} 2(x+1)^5=2\lim_{x\to 2}(x+1)^5=2(2+1)^5=2(3)^5=2(243)=486$$

$$\lim_{x\to 2} h(x)=h(2)$$

بنا بر این تابع $h(x)$ در نقطهٔ $x=2$ متمادی است.

از این جا چون توابع $g(x)$ و $h(x)$ در نقطهٔ $x=2$ متمادی اند؛ بنا بر این حاصل تفریق آن که عبارت از تابع $f(x)$ است در نقطهٔ $x=2$ نیز متمادی است.

$$f(x)=g(x)-h(x)=x^3-2(x+1)^5$$

$$2)\ g(x)=\frac{x^2+3}{(x^2-x+5)(x^2+2x)} \qquad ; \quad x=-1$$

$$\begin{cases} l(x)=x^2+3 \\ m(x)=x^2-x+5 \\ n(x)=x^2+2x \end{cases} \qquad g(x)=\frac{l(x)}{m(x)\cdot n(x)}$$

$$l(x)=x^2+3$$

$$l(-1)=(-1)^2+3=1+3=4$$

$$\lim_{x\to -1} l(x)=\lim_{x\to -1}(x^2+3)=(-1)^2+3=1+3=4$$

چون $\lim_{x\to -1} l(x)=l(-1)$ است؛ بنا بر این $l(x)$ در $x=-1$ متمادی است.

$$m(x)=x^2-x+5$$

$$m(-1)=(-1)^2-(-1)+5=1+1+5=7$$

$$\lim_{x\to -1} m(x)=\lim_{x\to -1}(x^2-x+5)=(-1)^2-(-1)+5=1+1+5=7$$

چون $\lim_{x\to -1} m(x) = m(-1)$ است؛ بنا بر این تابع $m(x)$ در $x=-1$ متمادی است.

$$n(x) = x^2 + 2x$$
$$n(-1) = (-1)^2 + 2(-1) = 1-2 = -1$$
$$\lim_{x\to -1} n(x) = \lim_{x\to -1}(x^2+2x) = (-1)^2 + 2(-1) = 1-2 = -1$$

چون $\lim_{x\to -1} n(x) = n(-1)$ است؛ بنا بر این تابع $n(x)$ در $x=-1$ متمادی است.

چون هر سه توابع $l(x)$، $m(x)$ و $n(x)$ در $x=-1$ متمادی اند؛ بنا بر این حاصل ضرب و حاصل تفریق این توابع نیز در $x=-1$ متمادی اند.

$$3)\ h(x) = \frac{x\sqrt{x}+1}{(x+2)^3} \quad ; \quad x=4$$

$$\left.\begin{aligned} m(x) &= x\sqrt{x}+1 \\ n(x) &= (x+2)^3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow h(x) = \frac{m(x)}{n(x)}$$

$$m(x) = x\sqrt{x}+1$$
$$m(4) = 4\sqrt{4}+1 = 4(2)+1 = 8+1 = 9$$
$$\lim_{x\to 4} m(x) = \lim_{x\to 4}(x\sqrt{x}+1) = 4\sqrt{4}+1 = 4\cdot 2+1 = 8+1 = 9$$

چون $\lim_{x\to 4} m(x) = m(4)$ است؛ بنا بر این تابع $m(x)$ در $x=4$ متمادی است.

$$n(x) = (x+2)^3$$
$$n(4) = (4+2)^3 = (6)^3 = 216$$
$$\lim_{x\to 4} n(x) = \lim_{x\to 4}(x+2)^3 = (4+2)^3 = (6)^3 = 216$$

چون $\lim_{x\to 4} n(x) = n(4)$ است؛ بنا بر این تابع $n(x)$ در $x=4$ متمادی است.

توابع $m(x)$ و $n(x)$ در $x=4$ متمادی اند؛ بنا بر این حاصل تقسیم آن که عبارت از تابع $h(x)$ است در $x=4$ متمادی است.

بخش دوم: شرح نمایید که چرا تابع $f(x) = \frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{2}}{x}$ در نقطهٔ $x=0$ غیر متمادی است.

حل: تابع $f(x) = \frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{2}}{x}$ در $x=0$ متمادی نیست چون در این نقطه این تابع تعریف نشده است؛ یعنی در این نقطه مخرج، صفر میگردد و ناحیهٔ تعریف این تابع قرار ذیل است:

$$\{x \in IR \,/\, x \geq -3 \;,\; x \neq 0\} \quad \text{یا} \quad [-3,0)\cup(0,+\infty)$$

فصل اول

عنوان درس: نکات مهم فصل اول

صفحهٔ کتاب (38-37)

وقت تدریس(یک ساعت درسی)

اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	• شاگردان مفاهیم نکات مهم فصل اول را بفهمند. • شاگردان مفاهیم نکات مهم فصل اول را خوبتر تحلیل و تجزیه نموده، سؤال‌ها و مثال‌های مربوط آن را حل کرده بتوانند. • شاگردان از یادگیری نکات مهم این فصل احساس خوشی نمایند.
روش های تدریس	سؤال و جواب، کار انفرادی
مواد ممد درسی	چارت که در آن تمام نکات مهم فصل اول تحریر شده باشد
توضیح ورودی (5) دقیقه	بعد از داخل شدن به صنف و انجام کارهای مقدماتی تدریس، به ارائه درس جدید بپردازید، چارتی را که از قبل تهیه نموده بودید آن را در پیشروی صنف آویزان نموده و توجه همهٔ شاگردان را به نکات مهم فصل جلب نموده و اهمیت این نکات را به شاگردان بیان نمایید تا شاگردان متوجه اهمیت آنها شوند و نکات مهم فصل اول را خوب فرا گیرند.

فعالیت جریان درس: (28) دقیقه

معلم محترم از شاگردان به نوبت بخواهید تا هر کدام یک عنوان نکات مهم فصل اول را از روی چارت بخوانند و بعد آن را روی تخته توضیح و تشریح نمایید. این کار را تا زمانی ادامه دهید تا همه نکات مهم فصل اول توسط شاگردان توضیح شود. اگر در توضیح شاگردان کدام اشتباهی موجود بود آن را روی چارت نشانی کرده به اصلاح آن بپردازید.

تحکیم درس: (7) دقیقه

برای تحکیم درس از شاگردان بخواهید تا هر یک از نکات مهم فصل اول را بخوانند و توضیح نمایند؛ اگر در توضیح آن شاگردان مشکل داشتند، خود شما آن را طوری واضح سازید که همهٔ مشکلات آنها حل گردد.

ارزیابی ختم درس: (5) دقیقه

معلم محترم برای این که مطمئن شوید آیا شاگردان نکات مهم فصل اول را خوب فرا گرفته اند یا خیر؟ چند سؤال را قرار ذیل طرح کنید:

- تقرب متحول از سمت راست و از سمت چپ چیست؟
- لیمیت را تعریف نمایید.
- لیمیت چند خواص دارد؟
- قضیهٔ ساندویچ چی را بیان میدارد؟

حل تمرینات عمومی فصل اول

به هر سؤال چهار جواب داده شده است، جواب درست را انتخاب کنید.

$$1-\lim_{x\to 0}\frac{3x-\sin x}{x}$$

حل:

$$\lim_{x\to 0}\frac{3x-\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}(\frac{3x}{x}-\frac{\sin x}{x})=\lim_{x\to 0}(3-\frac{\sin x}{x})=\lim_{x\to 0}3-\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=3-1=2$$

بنا بر این جزء(a) درست است.

$$2-\lim_{x\to -2}\frac{x^2-x-6}{x^2+x-2}$$

حل:

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2-x-6}{x^2+x-2}=\frac{(-2)^2-(-2)-6}{(-2)^2+(-2)-2}=\frac{4+2-6}{4-2-2}=\frac{6-6}{4-4}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2-x-6}{x^2+x-2}=\lim_{x\to -2}\frac{(x-3)(x+2)}{(x-1)(x+2)}=\lim_{x\to -2}\frac{(x-3)}{(x-1)}=\frac{-2-3}{-2-1}=\frac{-5}{-3}=\frac{5}{3}$$

بنا بر این جزء(b) درست است.

$$3-\lim_{x\to 1,4}(2x+0.3)$$

حل:

$$\lim_{x\to 1.4}(2x+0.3)=2(1.4)+0.3=2.8+0.3=3.1$$

بنا بر این جزء (d) درست است.

$$4-\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\tan 2x}$$

حل:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\tan 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{3x\cdot\frac{\sin 3x}{3x}}{2x\cdot\frac{\tan 2x}{2x}}=\frac{\lim_{x\to 0}(3x\cdot\frac{\sin 3x}{3x})}{\lim_{x\to 0}(2x\cdot\frac{\tan 2x}{2x})}=\frac{3\lim_{x\to 0}(\frac{\sin 3x}{3x})}{2\lim_{x\to 0}(\frac{\tan 2x}{2x})}=\frac{3(1)}{2(1)}=\frac{3}{2}$$

بنا بر این جزء (c) درست است.

$$5-\lim_{x\to 4}\frac{x-4}{\sqrt{x}-2}$$

حل:

$$\lim_{x\to 4}\frac{x-4}{\sqrt{x}-2}=\frac{4-4}{\sqrt{4}-2}=\frac{4-4}{2-2}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 4}\frac{x-4}{\sqrt{x}-2}=\lim_{x\to 4}(\frac{(x-4)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)})=\lim_{x\to 4}(\frac{(x-4)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x})^2-(2)^2})=\lim_{x\to 4}(\frac{(x-4)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)})$$

$$=\lim_{x\to 4}(\sqrt{x}+2)=\sqrt{4}+2=2+2=4$$

بنا بر اینجزء(d) درست است.

$$6-\ \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{1+\cos 2x}$$

حل:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{1+\cos 2x}=\frac{1-\sin\frac{\pi}{2}}{1+\cos 2\frac{\pi}{2}}=\frac{1-\sin\frac{\pi}{2}}{1+\cos\pi}=\frac{1-1}{1-1}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{1+\cos 2x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\frac{1-\sin x}{1+(1-2\sin^2 x)})=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\frac{1-\sin x}{2-2\sin^2 x})=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\frac{1-\sin x}{2(1-\sin^2 x)})$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\frac{1-\sin x}{2(1-\sin x)(1+\sin x)})=\frac{1}{2}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\frac{1}{(1+\sin x)})=\frac{1}{2}(\frac{1}{(1+\sin\frac{\pi}{2})})=\frac{1}{2(1+1)}=\frac{1}{2(2)}=\frac{1}{4}$$

همچنان این سؤال را میتوان به طریقهٔ هوپیتال قرار ذیل نیز حل نمود:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{1+\cos 2x}=\frac{1-\sin\frac{\pi}{2}}{1+\cos 2\frac{\pi}{2}}=\frac{1-\sin\frac{\pi}{2}}{1+\cos\pi}=\frac{1-1}{1-1}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{(1-\sin x)'}{(1+\cos 2x)'}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{(-\cos x)'}{(-2\sin 2x)'}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{-4\cos 2x}=\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{-4\cos 2\cdot\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{(-4)(-1)}=\frac{1}{4}$$

بنا بر این جزء(c) درست است.

7- لیمیت های زیر را دریابید.

حل:

$$1)\ \lim_{x\to 3}\frac{x^2-2x+5}{2x^2+1}=\frac{\lim_{x\to 3}(x^2-2x+5)}{\lim_{x\to 3}(2x^2+1)}=\frac{(3)^2-2(3)+5}{2(3)^2+1}=\frac{9-6+5}{2(9)+1}=\frac{8}{19}=0.421$$

$$2)\ \lim_{x\to -1}\sqrt{3+x}=\sqrt{\lim_{x\to -1}(3+x)}=\sqrt{3-1}=\sqrt{2}$$

$$3)\ \lim_{x\to +\infty}\frac{6}{x^2-7}=\lim_{x\to +\infty}\frac{\frac{6}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{7}{x^2}}=\lim_{x\to +\infty}\frac{\frac{6}{x^2}}{1-\frac{7}{x^2}}=\frac{\frac{6}{\infty^2}}{1-\frac{7}{\infty^2}}=\frac{0}{1-0}=\frac{0}{1}=0$$

$$4)\ \lim_{x\to\infty}\frac{x^4+x^2+x+6}{x^3-3x+4}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^4}{x^4}+\frac{x^2}{x^4}+\frac{x}{x^4}+\frac{6}{x^4}}{\frac{x^3}{x^4}-\frac{3x}{x^4}+\frac{4}{x^4}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}+\frac{6}{x^4}}{\frac{1}{x}-\frac{3}{x^3}+\frac{4}{x^4}}=\frac{1+\frac{1}{\infty^2}+\frac{1}{\infty^3}+\frac{6}{\infty^4}}{\frac{1}{\infty}-\frac{1}{\infty^3}+\frac{4}{\infty^4}}$$

$$=\frac{1+0+0+0}{0-0+0}=\frac{1}{0}=\infty$$

و یا به طریقهٔ دیگر:

$$\left.\begin{matrix}m=4\\ n=3\end{matrix}\right\}\quad m>n\quad\Rightarrow\ \lim_{x\to\infty}\frac{x^4+x^2+x+6}{x^3-3x+4}=\infty$$

$$5)\ \lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-2}{x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3x^2}{x^2}-\frac{2}{x^2}}{\frac{x}{x^2}+\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{3-\frac{2}{x^2}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=\frac{3-\frac{2}{\infty^2}}{\frac{1}{\infty}+\frac{1}{\infty^2}}=\frac{3-0}{0+0}=\frac{3}{0}=\infty$$

و یا به طریقهٔ دیگر نیز میتوان آن را حل کرد:

$$\left.\begin{matrix}m=2\\ n=1\end{matrix}\right\}\quad m>n\quad\Rightarrow\ \lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-2}{x+1}=\infty$$

$$6)\ \lim_{x\to 2}\frac{x^3+5x-18}{x^2+3x-10}=\frac{(2)^3+5(2)-18}{(2)^2+3(2)-10}=\frac{8+10-18}{4+6-10}=\frac{18-18}{10-10}=\frac{0}{0}$$

$$\begin{array}{l|l} x^3+5x-18 & x-2 \\ \hline & x^2+2x+9 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} -x^3\mp 2x^2 \\ \hline \quad 2x^2+5x \\ \quad -2x^2\mp 4x \\ \hline \qquad 9x-18 \\ \qquad -9x+18 \\ \hline \qquad\ 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow (x^3+5x-18)=(x-2)(x^2+2x+9)$$
$$(x^2+3x-10)=(x-2)(x+5)$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3+5x-18}{x^2+3x-10}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2+2x+9)}{(x-2)(x+5)}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2+2x+9}{x+5}=\frac{(2)^2+2(2)+9}{2+5}=\frac{4+4+9}{7}=\frac{17}{7}$$

$$7)\ \lim_{x\to 2}\frac{x^3-2x-4}{x-\sqrt{3x-2}}=(\frac{(2)^3-2(2)-4}{2-\sqrt{3(2)-2}}=\frac{8-4-4}{2-\sqrt{6-2}}=\frac{8-8}{2-\sqrt{4}}=\frac{0}{2-2}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-2x-4}{x-\sqrt{3x-2}}=\lim_{x\to 2}(\frac{(x^3-2x-4)(x+\sqrt{3x-2})}{(x-\sqrt{3x-2})(x+\sqrt{3x-2})})=\lim_{x\to 2}\frac{(x^3-2x-4)(x+\sqrt{3x-2})}{x^2-(\sqrt{3x-2})^2}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x^3-2x-4)(x+\sqrt{3x-2})}{(x^2-3x+2)}$$

$$\begin{array}{l|l} x^3-2x-4 & x-2 \\ \hline & x^2+2x+2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \pm x^3\mp 2x^2 \\ \hline \quad 2x^2-2x \\ \quad \pm 2x^2\mp 4x \\ \hline \qquad 2x-4 \\ \qquad \pm 2x\mp 4 \\ \hline \qquad\ 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow x^3-2x-4=(x-2)(x^2+2x+2)$$
$$(x^2-3x+2)=(x-2)(x-1)$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{(x^3-2x-4)(x+\sqrt{3x-2})}{(x^2-3x+2)}=\lim_{x\to 2}(\frac{(x-2)(x^2+2x+2)(x+\sqrt{3x-2})}{(x-2)(x-1)}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x^2+2x+2)(x+\sqrt{3x-2})}{x-1}=\frac{((2)^2+2(2)+2)(2+\sqrt{3(2)-2})}{2-1}=\frac{(4+4+2)(2+\sqrt{6-2})}{1}$$
$$=(10)(2+\sqrt{4})=(10)(2+2)=(10)(4)=40$$

8) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{x^2+3x-10}=\frac{(2)^2-3(2)+2}{(2)^2+3(2)-10}=\frac{4-6+2}{4+6-10}=\frac{6-6}{10-10}=\frac{0}{0}$

$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{x^2+3x-10}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-1)}{(x-2)(x+5)}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-1)}{(x+5)}=\frac{(2-1)}{(2+5)}=\frac{1}{7}$

9) $\lim_{x\to 0}(\frac{ax}{\tan bx})=\lim_{x\to 0}(\frac{ax}{\frac{\sin bx}{\cos bx}})=\lim_{x\to 0}(ax\cdot\frac{\cos bx}{\sin bx})=\lim_{x\to 0}ax(\frac{\cos bx}{\frac{bx\cdot\sin bx}{bx}})$

$=\frac{ax}{bx}\cdot\frac{\lim_{x\to 0}\cos bx}{\lim_{x\to 0}\frac{\sin bx}{bx}}=\frac{a}{b}\cdot\cos b(0)=\frac{a}{b}$

10) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x\cos x}=\frac{1-1}{0\cdot 1}=\frac{0}{0}$

$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\cdot\sin x}{x\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\cos x}=1\cdot\frac{\sin 0}{\cos 0}=1\cdot\frac{0}{1}=1\cdot 0=0$

11) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2+3x-10}{x^2-x-2}=\frac{(2)^2+3(2)-10}{(2)^2-2-2}=\frac{4+6-10}{4-4}=\frac{10-10}{4-4}=\frac{0}{0}$

$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+3x-10}{x^2-x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+5)}{(x-2)(x+1)}=\lim_{x\to 2}\frac{(x+5)}{(x+1)}=\frac{2+5}{2+1}=\frac{7}{3}$

12) $\lim_{x\to -2}(\frac{x+3}{x+2}+\frac{2}{x^2+2x})=\lim_{x\to -2}(\frac{x+3}{x+2}+\frac{2}{x(x+2)})=\lim_{x\to -2}(\frac{x(x+3)+2}{x(x+2)})$

$=\lim_{x\to -2}\frac{x^2+3x+2}{x(x+2)}=\lim_{x\to -2}\frac{(x+1)(x+2)}{x(x+2)}=\lim_{x\to -2}\frac{x+1}{x}=\frac{-2+1}{-2}=\frac{-1}{-2}=\frac{1}{2}$

13) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(a+x)+\sin(a-x)}{\tan(a+x)+\tan(a-x)}=\frac{\sin(a+0)+\sin(a-0)}{\tan(a+0)+\tan(a-0)}=\frac{\sin a+\sin a}{\tan a+\tan a}=\frac{2\sin a}{2\tan a}$

$=\frac{\sin a}{\tan a}=\frac{\sin a}{\frac{\sin a}{\cos a}}=\sin a\cdot\frac{\cos a}{\sin a}=\cos a$

14) $\lim_{x\to +\infty}(\frac{x^2}{2x^2-1}-\frac{x^2}{2x+2})=\lim_{x\to +\infty}(\frac{x^2(2x+2)-x^2(2x^2-1)}{(2x^2-1)(2x+2)})=\lim_{x\to +\infty}\frac{2x^3+2x^2-2x^4+x^2}{4x^3+4x^2-2x-2}$

$=\lim_{x\to +\infty}\frac{-2x^4+2x^3+3x^2}{4x^3+4x^2-2x-2}$

$\left.\begin{matrix}m=4\\ n=3\end{matrix}\right\}\quad m>n\quad\Rightarrow\lim_{x\to +\infty}\frac{-2x^4+2x^3+3x^2}{4x^3+4x^2-2x-2}=\lim_{x\to +\infty}\frac{-2x^4}{4x^3}=-\frac{1}{2}x=-\infty$

15) $\lim_{x\to 0}\frac{\cos x\sin x-\tan x}{x^2\sin x}=\lim_{x\to 0}(\frac{\cos x}{\cos x})(\frac{\cos x\cdot\sin x-\tan x}{x^2\sin x})=\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x\sin x-\sin x}{x^2\cos x\sin x}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(\cos^2 x-1)}{x^2\sin x\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x-1}{x^2\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{-(1-\cos^2 x)}{x^2\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin^2 x}{x^2\cos x}=\lim_{x\to 0}(\frac{-\sin x\sin x}{x\cdot x\cdot\cos x})$

$=-\lim_{x\to 0}(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x})=-\left[\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\right]=-(1\cdot 1\cdot\frac{1}{\cos 0})=-(1\cdot 1\cdot\frac{1}{1})=-1$

$$16)\ \lim_{x\to0}\frac{\cos x-\cos 3x+\sin^2 x}{ax^2}=\lim_{x\to0}\frac{2\sin 2x\sin x+\sin^2 x}{ax^2}=\lim_{x\to0}\frac{2\sin 2x\sin x}{ax^2}+\lim_{x\to0}\frac{\sin^2 x}{ax^2}$$

$$=\frac{2}{a}\lim_{x\to0}(\frac{\sin 2x}{x}\cdot\frac{\sin x}{x})+\frac{1}{a}\lim_{x\to0}(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\sin x}{x})$$

$$=\frac{4}{a}(\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x}{2x}\cdot\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x})+\frac{1}{a}(\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x})$$

$$=\frac{4}{a}(1\cdot1)+\frac{1}{a}(1\cdot1)=\frac{4}{a}+\frac{1}{a}=\frac{5}{a}$$

$$17)\ \lim_{x\to0}(\frac{2\sin 2x\sin x+\sin^2 x}{x^2})=\lim_{x\to0}(\frac{2\sin 2x\sin x}{x^2}+\frac{\sin^2 x}{x^2})=\lim_{x\to0}(2\frac{\sin 2x}{x}\frac{\sin x}{x})+\lim_{x\to0}(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\sin x}{x})$$

$$=2(\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x}{x}\cdot\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x})+\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=2(\frac{2}{1}\cdot1)+(1\cdot1)=4+1=5$$

حل این سؤال به طریقهٔ دوم با در نظر داشت این که اگر $x\to0$ نماييد $\sin ax\sim ax$ است؛ بنا بر آن:

$$\lim_{x\to0}\frac{2\sin 2x\sin x+\sin^2 x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{2\cdot2x\cdot x+x\cdot x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{4x^2+x^2}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{5x^2}{x^2}=\lim_{x\to0}5=5$$

$$18)\ \lim_{x\to0}\frac{x-\sin 2x}{x+\sin 3x}=\frac{0-\sin(2\cdot0)}{0+\sin(3\cdot0)}=\frac{0-\sin 0}{0+\sin 0}=\frac{0-0}{0+0}=\frac{0}{0}$$

با در نظر داشت $x\to0$ نماييد $\sin ax\sim ax$ است؛ بنا بر آن:

$$\lim_{x\to0}\frac{x-\sin 2x}{x+\sin 3x}=\lim_{x\to0}\frac{x-2x}{x+3x}=\lim_{x\to0}\frac{-x}{4x}=\lim_{x\to0}-\frac{1}{4}=-\frac{1}{4}$$

$$19)\ \lim_{x\to0}\frac{-2\sin 3x\sin 2x}{x\tan 3x}=-2\lim_{x\to0}(\frac{\sin 3x}{\tan 3x}\cdot\frac{\sin 2x}{x}\cdot)=-2(\lim_{x\to0}\frac{\sin 3x}{\tan 3x}\cdot\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x}{x})=-2\cdot\frac{3}{3}\cdot\frac{2}{1}=-4$$

$$20)\ \lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{\sqrt{x-2}\cdot\sqrt{x+2}}+\frac{1}{\sqrt{x+2}}=\lim_{x\to2}(\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{2})(\sqrt{x}+\sqrt{2})}{(\sqrt{x-2})(\sqrt{x+2})(\sqrt{x}+\sqrt{2})}+\frac{1}{\sqrt{x+2}})$$

$$=\lim_{x\to2}(\frac{(x-2)}{(\sqrt{x-2})(\sqrt{x+2})(\sqrt{x}+\sqrt{2})}+\frac{1}{\sqrt{x+2}})$$

$$=\lim_{x\to2}(\frac{(x-2)(\sqrt{x-2})}{\sqrt{(x-2)}\sqrt{(x-2)}(\sqrt{x+2})(\sqrt{x}+\sqrt{2})}+\frac{1}{\sqrt{x+2}})$$

$$=\lim_{x\to2}(\frac{(x-2)(\sqrt{x-2})}{\sqrt{(x-2)(x-2)}(\sqrt{x+2})(\sqrt{x}+\sqrt{2})}+\frac{1}{\sqrt{x+2}})$$

$$=\lim_{x\to2}(\frac{(x-2)(\sqrt{x-2})}{\sqrt{(x-2)^2}(\sqrt{x+2})(\sqrt{x}+\sqrt{2})}+\frac{1}{\sqrt{x+2}})=\lim_{x\to2}(\frac{(x-2)(\sqrt{x-2})}{(x-2)(\sqrt{x+2})(\sqrt{x}+\sqrt{2})}$$

$$=\lim_{x\to2}(\frac{\sqrt{x-2}}{(\sqrt{x+2})(\sqrt{x}+\sqrt{2})}+\frac{1}{\sqrt{x+2}})=\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+2}(\sqrt{x}+\sqrt{2})}+\lim_{x\to2}\frac{1}{\sqrt{x+2}}$$

$$=\frac{\sqrt{2-2}}{\sqrt{2+2}(\sqrt{2}+\sqrt{2})}+\frac{1}{\sqrt{2+2}}=\frac{\sqrt{0}}{\sqrt{4}(2\sqrt{2})}+\frac{1}{2}=\frac{0}{4\sqrt{2}}+\frac{1}{2}=0+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

نوت: در سؤال زیر در صورتی که $u\to0$ نماید؛ پس $\sin ua\sim ua$ در نظر می گیریم.

21) $\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\sin 3(\pi+u)}{\sin 8(\pi+u)}=\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{-\sin 3u}{\sin 8u}=\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{-3u}{8u}=\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{-3}{8}=-\dfrac{3}{8}$

22) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x^2}{\sin\pi x}=\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{1-(u+1)^2}{\sin\pi(u+1)}=\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{1-(u^2+2u+1)}{\sin\pi(u+1)}$

$$=\lim_{u\to 0}\frac{1-u^2-2u-1}{\sin\pi(u+1)}=\lim_{u\to 0}\frac{(-u^2-2u)}{\sin\pi(u+1)}=\lim_{u\to 0}\frac{-u(u+2)}{\sin\pi(u+1)}$$

$$=\lim_{u\to 0}\frac{-u(u+2)}{-\sin\pi u}=\lim_{u\to 0}\frac{-u(u+2)}{-\pi u}=\lim_{u\to 0}\frac{u+2}{\pi}=\frac{0+2}{\pi}=\frac{2}{\pi}$$

$$\because\begin{cases}x=u+1\\ u=x^2-1\\ x\to 1\\ u\to 0\end{cases}$$

$$\because\begin{cases}u\to 0\\ \sin au\sim au\end{cases}$$

23) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-x+3}{x^2-8x+5}$

$$\left.\begin{matrix}m=2\\ n=2\end{matrix}\right\}\quad m=n\quad\Rightarrow\quad\left.\begin{matrix}a_0=2\\ b_0=1\end{matrix}\right\}\quad\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-x+3}{x^2-8x+5}=\frac{a_0}{b_0}=\frac{2}{1}=2$$

24) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x+4}{4x+\sqrt{x}}$

$$\left.\begin{matrix}m=1\\ n=1\end{matrix}\right\}\quad m=n\quad\Rightarrow\quad\left.\begin{matrix}a_0=8\\ b_0=4\end{matrix}\right\}\quad\lim_{x\to\infty}\frac{8x+4}{4x+\sqrt{x}}=\frac{a_0}{b_0}=\frac{8}{4}=2$$

25) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{9x^2-x+5}{\sqrt{9x^4+1}}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 2}(9x^2-x+5)}{\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{9x^4+1}}=\dfrac{9(2)^2-2+5}{\sqrt{9(2)^4+1}}=\dfrac{9(4)+3}{\sqrt{9(16)+1}}=\dfrac{36+3}{\sqrt{144+1}}=\dfrac{39}{\sqrt{145}}$

26) $\lim\limits_{x\to 1}(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{1}{1-x^2})=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{1-x}-\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{1-x^2}=(\dfrac{1}{1-1})-(\dfrac{1}{1-1^2})=\dfrac{1}{0}-\dfrac{1}{0}=\infty-\infty$

$\lim\limits_{x\to 1}(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{1}{1-x^2})=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1+x-1}{(1-x)(1+x)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x}{(1-x)(1+x)}=\dfrac{1}{(1-1)(1+1)}=\dfrac{1}{0\cdot 2}=\dfrac{1}{0}=\infty$

فصل دوم: مشتقات

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=?$$

عنوان درس: مشتقات

صفحهٔ کتاب (43)

وقت تدریس(دو ساعت درسی) ساعت اول درسی

اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	• شاگردان مفهوم مشتقات را بدانند. • شاگردان مشتق توابع را دریافت کرده بتوانند. • شاگردان به دریافت و محاسبهٔ مشتق یک تابع علاقه‌مندی پیدا نمایند.
روش های تدریس	سؤال و جواب، کارگروهی
مواد ممد درسی	چارت شکل ورودی که لیمیت مطلوبه در آن دریافت شده باشد.
توضیح ورودی (5) دقیقه	بعد از داخل شدن به صنف و انجام کارهای مقدماتی تدریس، به توضیح بخش ورودی درس بپردازید. چارتی را که از قبل تهیه نموده اید پیش‌روی صنف آویزان نموده، بعد لیمیت مطلوب را محاسبه کنید، در هر قسمت از شاگردان سؤال نمایید و جواب‌های قناعت بخش به دست آرید تا بخش ورودی درس به شاگردان واضح گردد؛ طور مثال: $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ قرار ذیل دریافت میگردد. به عوض $f(x)$ قیمت آن x^2-1 را وضع می‌کنیم؛ پس داریم که: $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)-0}{(x-1)}=2$ و این چنین معنی دارد که اگر در نقطهٔ 1 به منحنی تابع $f(x)=x^2-1$ مماس رسم شود میل این مماس در نقطهٔ 1 مساوی به(2) است و یا به عبارهٔ دیگر(2) عبارت از تانجنت زاویه‌یی است که مماس در نقطهٔ 1 با جهت مثبت محور x میسازد.

فعالیت جریان درس: (28) دقیقه

چهار سؤالی که در تحت عنوان(میل یک منحنی) در صفحهٔ 43 کتاب درسی وجود دارد از شاگردان بپرسید و جواب‌های قناعت بخش به دست آرید؛ سپس نتیجه‌یی که از طرح سؤال‌های مذکور و جواب‌های آنها به دست می‌آید و در کتاب درسی در تحت سؤالهای متذکره وجود دارد به شاگردان بیان نمایید.

شاگردان را به گروه های مناسب تقسیم نموده و از آنها بخواهید تا اعضای هر گروه با مشورهٔ بایکدیگر فعالیت صفحهٔ 43 کتاب درسی را انجام دهند. در جریان کار گروهی از گروه‌ها نظارت به عمل آرید تا تمام شاگردان در فعالیت سهم فعال داشته باشند و هم اگر در اجرای فعالیت مشکل داشتند رهنمایی نمایید در ختم کار گروهی از نمایندهٔ یک گروه بخواهید تا فعالیتی را که انجام داده اند به دیگران توضیح دهند.

مثال 1 صفحهٔ 44 کتاب درسی را روی تخته بنویسید و آن را حل نمایید، طوری که شاگردان نیز سهم فعال داشته باشند به این معنی که به شیوهٔ سؤال جواب مثال مذکور را کار نمایید.

تحکیم درس: (7) دقیقه

برای این که درس جدید را شاگردان بهتر فراگیرند بعضی نکات مهم درس را بار دیگر تکرار نمایید؛ طور مثال: رابطهٔ خارج قسمت نیوتن عبارت است از: $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

میل منحنی در هر نقطهٔ اختیاری آن از رابطهٔ($m_T = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$) به دست می‌آید.

ارزیابی ختم درس: (5) دقیقه

برای این که مطمئن شوید آیا شاگردان درس جدید را آموخته اند یا خیر؟ به ارتباط درس جدید ارائه سؤالهای زیر را مطرح کنید:

- آیا میل خط مستقیم و یک منحنی یکسان است؟
- آیا میل یک خط مستقیم در تماس تمام نقاط ثابت است؟ یا در یک نقطهٔ خاص.

معلومات اضافی برای معلم

در اوایل قرن هفدهم ریاضی دان معروف فرانسوی(پیردی‌فرما) وقتی در مورد ماکزیمم و منیمم نسبی توابع کار می‌کرد، متوجه شد که مماس بر منحنی در این نقاط موازی محور xها می‌باشد، این پدیده وی را به حل مسأله یافتن امتداد مماسها بر منحنی در حالت کلی واداشت که این مطلب اساس مسأله جدید به نام مشتق گردید. مطالعات ارزشمند لایبنتز و نیوتن در این زمینه همزمان؛ ولی دور از هم انجام می‌شد به نتایج بسیار بزرگی رسید که امروز این مبحث در انالیز ریاضی کلید اصلی حل بسیاری از مسائل مهم است؛ همچنان به وسیلهٔ مشتق می‌توان به بسته‌گی بین ریاضیات و علوم تجربی؛ مانند: فزیک، انجنیری، طب، زراعت، علوم اجتماعی و انسانی ... پی برد و رابطه میان بسیاری از مسائل نظری و عملی را آشکارا مشاهده کرد.

جواب به سؤال های تمرین

1- در توابع زیر برای متحول x تزاید Δx و برای y تزاید Δy را در نظر گرفته، نسبت $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ و میل منحنی را در نقاط خواسته شده دریابید.

1) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = ?\ ,\quad f(x) = 2x^2 - 4\quad ,\ (0)$

2) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = ?\ ,\quad f(x) = 2x - x^2\quad ,\ (3)$

3) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = ?\ ,\quad f(x) = 3x^2 - 5x + 4\quad ,\ (2,-1)$

حل 1):

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{2(0+h)^2-4-(2\cdot 0-4)}{h}$$

$$=\frac{2h^2-4+4}{h}=\frac{2h^2}{h}=2h$$

$$m_T=\lim_{h\to 0}(2h)=0$$

حل 2):

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{f(3+h)-f(3)}{h}=\frac{2(3+h)-(3+h)^2-[(2\cdot 3)-(3)^2]}{h}$$

$$=\frac{6+2h-(9+6h+h^2)-(6-9)}{h}=\frac{6+2h-9-6h-h^2-6+9}{h}=\frac{2h-6h-h^2}{h}$$

$$=\frac{-4h-h^2}{h}=\frac{h(-4-h)}{h}=-4-h$$

$$m_T=\lim_{h\to 0}(-4-h)=-4$$

حل 3):

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\frac{3(2+h)^2-5(2+h)+4-(3\cdot 2^2-5\cdot 2+4)}{h}$$

$$=\frac{3(4+4h+h^2)-10-5h+4-12+10-4}{h}=\frac{12+12h+3h^2-5h-12}{h}$$

$$=\frac{7h+3h^2}{h}=\frac{h(7+3h)}{h}=7+3h$$

$$m_T=\lim_{h\to 0}(7+3h)=7$$

پس معادلهٔ مماسی که از نقطهٔ $(2,-1)$ با میل 7 می‌گذرد عبارت است از:

$$y-y_1=m(x-x_1) \qquad x_1=2$$

$$y-(-1)=7(x-2) \qquad y_1=-1$$

$$y+1=7x-14$$

$$y=7x-14-1$$

$$\boxed{y=7x-15}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=?$$

فصل دوم

عنوان درس: مشتقات

صفحهٔ کتاب (45)

وقت تدریس: یک ساعت درسی(45 دقیقه)

اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	• شاگردان مفهوم مشتقات را بدانند. • شاگردان مشتق توابع را دریافت کرده بتوانند. • شاگردان از دریافت و محاسبهٔ مشتق یک تابع احساس خوشی نمایند.
روش های تدریس	سؤال و جواب، کارگروهی
مواد ممد درسی	چارت شکل ورودی که در ساعت اول درسی از آن استفاده گردیده بود.
توضیح ورودی (5) دقیقه	ابتدا کارهای مقدماتی تدریس را که بعد از داخل شدن به صنف برای هر معلم ضروری است انجام دهید؛ سپس بار دیگر به توضیح بخش ورودی درس بپردازید. چارت شکل ورودی را پیش‌روی صنف آویزان نموده و توضیحاتی را که در ساعت اول داده بودید آن را بار دیگر تکرار نمایید؛ یعنی لیمیت شکل ورودی را بار دیگر دریافت کنید، طوری که شاگردان سهم فعال داشته باشند.

فعالیت جریان درس: (28) دقیقه

شاگردان را به گروه های مناسب تقسیم نموده و به هر گروه وظیفه دهید تا اعضای آن با مشورهٔ یکدیگر مثال 2 صفحهٔ 45 کتاب درسی را حل نمایند در جریان کار گروهی از گروه‌ها نظارت به عمل آرید تا تمام شاگردان در اجرای فعالیت سهم فعال داشته باشند؛ همچنان اگر در اثنای انجام کار گروهی شاگردان به کدام مشکلی رو به رو می‌شوند آنها را رهنمایی کنید.

حال مطابق به توضیحاتی که در صفحهٔ 46 کتاب درسی تحت نام(تغییر اوسط یا تغییر متوسط) در کتاب درسی آورده شده است به شاگردان معلومات ارائه دارید، طوری که در اثنای توضیحات به شاگردان نیز سهم بدهید تا آنها در این مورد خود را سهیم دانسته و به سؤالاتی که از آنها می‌نمایید جواب‌های قناعت بخش ارائه نمایند؛ در نتیجه تعریف تغییر متوسط را به آنها خوب واضح سازید.

تحکیم درس: (7) دقیقه

برای این که شاگردان به مفهوم تغییر متوسط خوب پی ببرند مثال صفحهٔ 46 کتاب درسی را روی تخته بنویسید و آن را حل نمایید، طوری که شاگردان نیز سهم فعال داشته باشند؛ طور مثال: هنگام حل مثال در هر قسمت از شاگردان سؤال نمایید و جواب‌های قناعت بخش به دست آرید.

ارزیابی ختم درس: (5) دقیقه

معلم محترم برای این که مطمئن شوید آیا شاگردان درس جدید را فرا گرفته اند یا خیر؟ ارزیابی نمایید؛ طور مثال: از شاگردان بپرسید:

- کی میتواند خارج قسمت نیوتن را روی تخته بنویسد؟
- کی میتواند تغییر متوسط را تعریف ور ابطهٔ مربوط به آن را روی تخته بنویسد؟

معلومات اضافی برای معلم

اسحاق نیوتن در سال 1642 در روز کریسمس در دهکدهٔ وولز تورپ در لینکلن شایر انگلستان متولد شد، پدرش رابرت یک دهقان بود که سه ماه قبل از تولد او درگذشته بود. نیوتن خواندن و نوشتن را در مدرسهٔ ابتدایی محلی یاد گرفت و در سال 1655 ازطرف مدرسهٔ ابتدایی در مورد او تصمیم گرفتند که مدرسهٔ ابتدایی را ترک و به مدرسهٔ کینگ در گرانتهام برود.

اسحاق نیوتن در سال‌های اول تحصیلی در این مدرسه به آموزش زبان لاتین، یونانی و کتاب مقدس مشغول بود از همین رو مدیر مدرسه در این فکر بود که نیوتن لیاقت اشتراک در دانشگاه را دارد. از همین سبب بود که نیوتن به دانشگاه کمبریج وارد شد. وی انسانی بود که در سن 23 ساله‌گی به درجه‌یی رسید که می‌توانست مماس و شعاع مماس و شعاع انحنا در یک نقطه‌یی از منحنی را پیدا کند که این روش امروز تحت عنوان حساب دیفرانسیل شناخته می‌شود. نیوتن در سن 27 سالگی به استادی دانشگاه برگزیده شد و در حدود 65 سال در ریاضیات و فزیک کار کرد. که اولین کتاب بزرگ وی اصول ریاضی فلسفهٔ طبیعی نام داشت که در چهار بخش تدوین شده بود، بالآخره نیوتن در سال 1727 در لندن به اثر مریضی که عاید حالش گردیده بود درگذشت و در همانجا به خاک سپرده شد.

جواب به سؤال های تمرین

2- تغییرات متوسط تابع $f(t)=5t^3-3t+1$ را در انتروال $[2,4]$ دریابید.

حل:

از این که $x_1=2$ و $x_2=4$ است؛ پس بنابر تعریف داریم که:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{f(4)-f(2)}{4-2}=\frac{5(4)^3-3(4)+1-(5\cdot 2^3-3\cdot 2+1)}{2}$$

$$=\frac{5(64)-12+1-40+6-1}{2}=\frac{320-52+6}{2}=\frac{326-52}{2}=\frac{274}{2}=137$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

فصل دوم

عنوان درس: مشتق یک تابع

صفحهٔ کتاب (47)

وقت تدریس: یک ساعت درسی

اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	• شاگردان مفهوم مشتق را بدانند. • شاگردان مشتق یک تابع را دریافت کرده بتوانند. • شاگردان از دریافت مشتق توابع احساس خوشی نمایند.
روش های تدریس	سؤال و جواب، کار گروهی و انفرادی
مواد ممد درسی	مواد مورد ضرورت
توضیح ورودی (5) دقیقه	بعد از انجام کارهای مقدماتی تدریس که قبل از ارائهٔ درس جدید ضروری است به توضیح بخش ورودی بپردازید. ابتدا افادهٔ بخش ورودی را روی تخته بنویسید، بعد سؤالی که در بخش ورودی آمده است آن را از شاگردان بپرسید و از آنها جواب به دست آرید و اگر مؤفق نشدید به آنها بگویید لیمیت مقابل، مشتق یک تابع را نشان می‌دهد و ما میتوانیم آن را به اشکال ذیل نشان دهیم: $y'=f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}f(x)=Df(x)=D_x f(x)$

فعالیت جریان درس: (28) دقیقه

شاگردان را به گروه های مناسب تقسیم نموده و به هر یک از آنها وظیفه دهید تا فعالیت صفحهٔ 47 کتاب درسی را انجام دهند. در جریان فعالیت از گروه‌ها نظارت نمایید تا تمام شاگردان در انجام فعالیت سهم فعال داشته باشند. در اثنای فعالیت اگر گروه‌ها به مشکلی رو به رو می‌شوند آنها را رهنمایی کنید. در ختم کار گروهی از نمایندهٔ یک گروه بخواهید تا فعالیتی را که انجام داده اند به دیگران توضیح دهند. بعدا تعریفی که در صفحهٔ 47 کتاب درسی آمده است مطابق به آن مشتق یک تابع را به شاگردان تعریف نموده و اشکال مختلف نمایش مشتق را به شاگردان نشان دهید.

حال، مثال اول صفحهٔ 47 کتاب درسی را روی تخته بنویسید و بعد آن را طوری حل نمایید که شاگردان نیز سهم فعال داشته باشند؛ اکنون مثال دوم صفحهٔ 48 کتاب درسی را روی تخته بنویسید و از یک شاگرد داوطلب بخواهید تا آن را روی تخته حل نماید، همزمان از شاگردان دیگر بخواهید تا سؤال مذکور را به کتابچه‌های خویش حل نمایند، اگر در حل سؤال روی تخته کدام مشکلی وجود داشت از یک شاگرد دیگر بخواهید تا آن را اصلاح نماید. زمانی که مطمئن شدید که حل سؤال روی تخته درست است از سایر شاگردان بخواهید تا سؤال حل شدهٔ کتابچه‌های شان را باآن مقایسه نمایند.

تحکیم درس: (7) دقیقه

برای این که درس جدید را شاگردان بهتر فراگیرند مثال 3 صفحهٔ 48 کتاب درسی را روی تخته بنویسید و آن را حل نمایید طوری که شاگردان در حل سؤال سهم فعال داشته باشند؛ یعنی در هر مرحله از شاگردان سؤال کنید و جواب درست به دست آرید تا شاگردان خود را در حل مثال سهیم بدانند و موضوع را بهتر درک نمایند.

ارزیابی ختم درس: (5) دقیقه

برای این که مطمئن شوید آیا شاگردان درس جدید را فرا گرفته اند یا خیر؟ ارزیابی کنید؛ طور مثال: از شاگردان بپرسید:

- کی میتواند مشتق را تعریف و رابطهٔ مربوط به این تعریف را روی تخته بنویسد؟
- کی متیواند اشکال مختلف مشتق را روی تخته بنویسد؟

جواب به سؤال های تمرین

مشتق توابع زیر را با در نظر داشت تعریف مشتق به دست آرید.

1) $f(x) = x - x^2$ 2) $f(x) = -2x^2$ 3) $f(x) = 2x^2 + x$

حل 1):

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x + \Delta x - (x+\Delta x)^2 - (x - x^2)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x + \Delta x - \left[x^2 + 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2\right] - x + x^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x + \Delta x - x^2 - 2x \cdot \Delta x - (\Delta x)^2 - x + x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x - 2x \cdot \Delta x - (\Delta x)^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(1 - 2x - \Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (1 - 2x - \Delta x) = 1 - 2x$$

حل 2):

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-2(x+\Delta x)^2 - (-2x^2)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-2\left[x^2 + 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2\right] + 2x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-2x^2 - 4x \cdot \Delta x - 2(\Delta x)^2 + 2x^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-4x \cdot \Delta x - 2(\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(-4x - 2\Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (-4x - 2\Delta x) = -4x$$

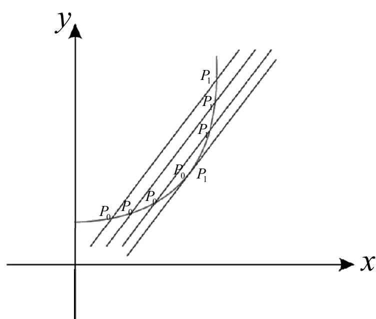
حل 3):

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2(x+\Delta x)^2 + (x+\Delta x) - (2x^2 + x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\left[x^2 + 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2\right] + x + \Delta x - 2x^2 - x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x^2 + 4x \cdot \Delta x + 2(\Delta x)^2 + x + \Delta x - 2x^2 - x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{4x \cdot \Delta x + 2(\Delta x)^2 + \Delta x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(4x + 2\Delta x + 1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (4x + 2\Delta x + 1) = 4x + 1$$



فصل دوم

عنوان درس: تعبیر هندسی مشتق

صفحهٔ کتاب (49)

وقت تدریس(دو ساعت درسی) ساعت اول درسی(45 دقیقه)

اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	• شاگردان مفهوم تعبیر هندسی مشتق را بدانند. • شاگردان مشتق را از نگاه هندسی تعبیر و تفسیر کرده بتوانند. • شاگردان از تعبیر هندسی مشتق احساس خوشی نمایند.
روش های تدریس	سؤال و جواب، کار گروهی
مواد ممد درسی	چارت شکل ورودی... .
توضیح ورودی (5) دقیقه	ابتدا کارهای مقدماتی تدریس که بعد از داخل شدن به صنف ضروری است؛ مانند: سلام، احوالپرسی، تنظیم صنف، ملاحظهٔ کارخانه گی و ... انجام دهید؛ سپس به توضیح بخش ورودی درس جدید بپردازید، چارت شکل ورودی را که از قبل آماده نموده اید پیش‌روی صنف آویزان کنید. بعد سؤال بخش ورودی را به شاگردان مطرح نمایید اگر شاگردان درست جواب ندادند به آنها بگویید که در شکل یک منحنی با سه قاطع و یک مماس را در ناحیهٔ اول سیستم کمیات وضعیهٔ قایم مشاهده می کنید و هم بگویید که اگر نقاط هر قاطع بالای منحنی حرکت نمود و باهم منطبق گردند، قاطع‌ها شکل مماس را به خود می گیرند.

فعالیت جریان درس: (28) دقیقه

شاگردان را به گروه های مناسب تقسیم نموده و به هر گروه وظیفه دهید تا فعالیت صفحهٔ 49 کتاب درسی را انجام دهند. در جریان فعالیت از گروه‌ها نظارت کنید تا تمام شاگردان در فعالیت سهم فعال داشته باشند، اگر در انجام فعالیت به مشکلی رو برو می‌شوند آنها را رهنمایی کنید. در ختم فعالیت از نمایندهٔ یک گروه بخواهید تا فعالیتی را که انجام داده اند به دیگران توضیح دهد.

اکنون نتیجهٔ که از انجام فعالیت بالا به دست می‌آید به شاگردان بیان داشته و بعد تعریف صفحهٔ 49 کتاب درسی را به آنها ارائه نمایید.

مثال 1 صفحهٔ 50 کتاب درسی را روی تخته بنویسید و بعد آن را حل نمایید طوری که شاگردان نیز سهم فعال داشته باشند؛ یعنی در هر قسمت از شاگردان سؤال نموده و جواب‌های قناعت بخش به دست آرید تا شاگردان خود را در حل مثال سهیم بدانند.

تحکیم درس: (7) دقیقه

برای این که شاگردان مفهوم درس جدید را بهتر درک نمایند، مثال 2 صفحهٔ 50 کتاب درسی را روی تخته بنویسید و آن را به روش سؤال، جواب حل نمایید.

ارزیابی ختم درس: (5) دقیقه

برای این که مطمئن شوید آیا شاگردان درس جدید را فرا گرفته اند یا خیر؟ ارزیابی نمایید؛ برای این کار از شاگردان بپرسید:

- کی میتواند روی تخته رابطه‌یی را بنویسد که مشتق را از نگاه هندسی تعبیر و تفهیم نماید؟
- کی میتواند تعریف مربوط به تعبیرهندسی مشتق را روی تخته بنویسید؟

جواب به سؤال های تمرین

1- مشتق توابع زیر را دریابید.

1) $f(x)=5x^2-2$ 2) $f(x)=\dfrac{2}{x}$

حل 1):

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{5(x+\Delta x)^2-2-(5x^2-2)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{5\left[x^2+2x\cdot\Delta x+(\Delta x)^2\right]-2-5x^2+2}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{5x^2+10x\cdot\Delta x+5(\Delta x)^2-2-5x^2+2}{\Delta x}$$

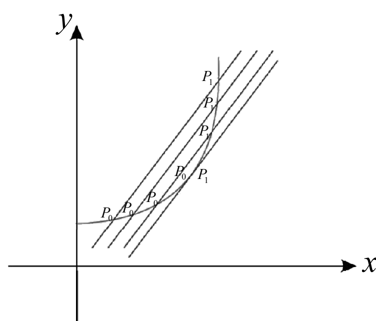
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{10x\cdot\Delta x+5(\Delta x)^2}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x(10x+5\Delta x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(10x+5\Delta x)=10x$$

حل 2):

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{2}{(x+\Delta x)}-\dfrac{2}{x}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{2x-2(x+\Delta x)}{(x+\Delta x)x}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{2x-2x-2\Delta x}{(x+\Delta x)x}}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{-2\Delta x}{(x+\Delta x)x}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-2\Delta x}{(x+\Delta x)x}\cdot\frac{1}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-2\Delta x}{\Delta x(x+\Delta x)x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-2}{(x+\Delta x)x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-2}{x^2+\Delta x\cdot x}=\frac{-2}{x^2}$$



فصل دوم

عنوان درس: تعبیر هندسی مشتق

صفحهٔ کتاب (50)

وقت تدریس: ساعت دوم درسی(45 دقیقه)

اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	• شاگردان مفهوم تعبیر هندسی مشتق را بدانند. • شاگردان میل مماس یک تابع را در یک نقطه دریافت کرده بتوانند. • شاگردان از حل‌مثال‌های مربوط به موضوع فوق‌الذکر احساس خوشی نمایند.
روش های تدریس	سؤال و جواب، کارگروهی و انفرادی
مواد ممد درسی	چارت شکل ورودی... .
توضیح ورودی (5) دقیقه	ابتدا کارهای مقدماتی تدریس را که بعد از داخل شدن به صنف برای معلم ضروری است آن را انجام دهید. بعد بخش ورودی را که در ساعت قبل توضیح نموده بودید یکبار دیگر تکرار نمایید تا این بخش برای شاگردان خوب واضح شود.

فعالیت جریان درس: (28) دقیقه

شاگردان را به گروه های مناسب تقسیم نموده و به آنها وظیفه دهید که اعضای هر گروه بعد از مشورت بایکدیگر مثال 3 صفحهٔ 50 کتاب درسی را حل کنند. در جریان کار گروهی نظارت نمایید تا تمام شاگردان در اجرای فعالیت سهم فعال داشته باشند و هم اگر در اجرای فعالیت به مشکلی رو به رو می‌شوند آنها را رهنمایی کنید. در ختم کار گروهی از نمایندهٔ یک گروه بخواهید تا فعالیتی را که انجام داده اند به دیگران توضیح دهد.

مثال 4 صفحهٔ 51 کتاب درسی را روی تخته بنویسید و از یک شاگرد داوطلب بخواهید تا آن را روی تخته حل نماید همزمان از شاگردان دیگر بخواهید تا همان مثال را به شکل انفرادی در کتابچه‌های شان حل نمایند؛ اگر در حل سؤال روی تخته مشکلی یا غلطی وجود داشت از یک شاگرد بخواهید تا آن را اصلاح نماید. زمانی که مطمئن شدید حل روی تخته درست است از سایر شاگردان بخواهید تا سؤال حل شدهٔ کتابچه‌های شان را با سؤال حل شدهٔ روی تخته مقایسه نمایند.

تحکیم درس: (7) دقیقه

برای این که شاگردان درس جدید را بهتر فراگیرند مثال5 صفحهٔ 51 کتاب درسی را روی تخته بنویسید و آن را طوری حل کنید که شاگردان نیز سهم فعال داشته باشند؛ به این معنی که هنگام حل مثال همواره از شاگردان سؤال کنید و جواب‌های قناعت بخش به دست آرید تا به این ترتیب شاگردان خود را در حل مثال سهیم بدانند.

ارزیابی ختم درس: (5) دقیقه

برای این که اطمینان حاصل نمایید که آیا شاگردان درس جدید را درست فرا گرفته اند یا خیر؟ ارزیابی نمایید، برای این کار از شاگردان بپرسید:

- کی میتواند روی تخته رابطه‌یی را بنویسد که توسط آن مشتق یک تابع را در یک نقطه دریافت کرده بتوانیم؟
- کی میتواند بگوید که میل مماس در یک نقطهٔ منحنی یک تابع چه مفهوم را می‌رساند این مفهوم را بیان کنید؟

جواب به سؤال های تمرین

2- مشتق توابع زیر را در نقاط داده شده پیدا کنید:

$$1)\ f(x)=4x^2 \quad , \quad x_0=\frac{1}{2} \qquad\qquad 2)\ f(x)=3x-1 \quad , \quad x_0=-1$$

حل 1):

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{4(x_0+\Delta x)^2-4{x_0}^2}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{4\left[{x_0}^2+2x_0\cdot\Delta x+(\Delta x)^2\right]-4{x_0}^2}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{4x_0^2+8x_0\cdot\Delta x+4(\Delta x)^2-4{x_0}^2}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{8x_0\cdot\Delta x+4(\Delta x)^2}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x(8x_0+4\Delta x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(8x_0+4\Delta x)=8x_0$$

میل مماس تابع $y'=8x_0$ در نقطهٔ $x_0=\frac{1}{2}$ عبارت است از:

$$m=y'=8(\frac{1}{2})=4$$

حل 2):

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{3(x_0+\Delta x)-1-(3x_0-1)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{3x_0+3\Delta x-1-3x_0+1}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{3\Delta x}{\Delta x}=3$$

چون مشتق اول تابع $f(x)=3x-1$ یک عدد ثابت است؛ پس در نقطهٔ $x_0=-1$ مشتق آن موجود نیست.

فصل دوم

$$f(x) = 2x^2$$

عنوان درس: قوانین مشتق(مشتق یک عدد ثابت)

صفحهٔ کتاب(53)

وقت تدریس(یک ساعت درسی)

اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	• شاگردان قوانین مشتق را بدانند. • شاگردان سؤالات مشتق را حل کرده بتوانند. • شاگردان از حل سؤالات مشتق احساس خوشی نمایند.
روش های تدریس	سؤال و جواب، کار گروهی و انفرادی
مواد ممد درسی	چارت شکل ورودی... .
توضیح ورودی (5) دقیقه	نخست کارهای مقدماتی تدریس که بعد از داخل شدن به صنف برای هر معلم ضروری است انجام دهید؛ سپس به توضیح بخش ورودی بپردازید. چارت شکل ورودی را که از قبل آماده نموده اید آن را پیش‌روی صنف آویزان کرده و بعد سؤال بخش ورودی را به شاگردان طرح و خواهان جواب شوید و اگر شاگردان موفق به ارائهٔ جواب درست نگردیدند به آنها بگویید: بلی، طریقهٔ سادهٔ دیگری نیز وجود دارد که آن را در مشتق یک عدد طاقت دار که بعد از این درس آمده است مطالعه خواهید کرد و آن عبارت از این است که برای دریافت مشتق اعداد طاقت دار طاقت ضریب می‌شود و از طاقت به اندازهٔ یک واحد کم می‌شود.

فعالیت جریان درس: (28) دقیقه

شاگردان را به گروه های مناسب تقسیم نموده و به هر گروه وظیفه دهید تا فعالیت صفحهٔ 53 کتاب درسی را انجام دهند، در جریان فعالیت از گروه‌ها نظارت به عمل آورده تا تمام شاگردان به صورت فعال در فعالیت سهم داشته باشند؛ همچنان اگر در اثنای اجرای فعالیت به مشکلی رو به رو می‌شوند آنها را رهنمایی کنید. در ختم فعالیت از نمایندهٔ یک گروه بخواهید تا فعالیتی را که انجام داده اند به دیگران توضیح دهد.

حال نتیجه‌یی که از فعالیت فوق به دست می‌آید آن را به شاگردان بیان داشته ونتیجهٔ نهایی را که مشتق یک عدد ثابت صفر است روی تخته بنویسید و بعد آن را ثبوت نمایید، طوری که شاگردان نیز سهم فعال داشته باشند.

حال مثال صفحهٔ 53 کتاب درسی را روی تخته بنویسید و از یک شاگرد داوطلب بخواهید تا آن را حل کند، همزمان از سایر شاگردان بخواهید تا مثال مذکور را در کتابچه‌های شان حل کنند، زمانی که مطمئن شدید حل سؤال روی تخته درست است از شاگردان بخواهید تا سؤال حل شدهٔ کتابچه‌های شان را با سؤال حل شدهٔ روی تخته مقایسه کنند.

تحکیم درس: (7) دقیقه

برای این که شاگردان درس جدید را درست فراگیرند چندین عدد ثابت را روی تخته بنویسید و به شاگردان بفهمانید که مشتق تمام آنها صفر است.

ارزیابی ختم درس: (5) دقیقه

برای این که مطمئن شوید آیا شاگردان درس جدید را فرا گرفته اند یا خیر؟ ارزیابی نمایید، برای این منظور از شاگردان بپرسید:

- کی میتواند مشتق تابع $f(x)=\frac{3\pi}{4}$ را دریافت نماید؟
- کی میتواند مشتق اعداد (1005), $(4\frac{9}{2})$ و $(\frac{5000}{4})$ را دریافت کند؟

جواب به سؤال های تمرین

مشتق تابع زیر را دریابید

5) $f(x)=10^{10}$

حل 5)**:**

$$f(x)=10^{10}=10000000000$$
$$f'(x)=0$$

فصل دوم

$$f(x) = 2x^2$$

عنوان درس: مشتق یک عدد طاقت‌دار

صفحهٔ کتاب(54)

وقت تدریس: یک ساعت درسی

اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	• شاگردان مفهوم اعداد طاقت دار را بدانند. • شاگردان مشتق اعداد طاقت دار را دریافت کرده بتوانند. • شاگردان از دریافت مشتق اعداد طاقت دار احساس خوشی نمایند.
روش های تدریس	سؤال و جواب، کار گروهی و انفرادی
مواد ممد درسی	چارت شکل ورودی... .
توضیح ورودی **(5) دقیقه**	ابتدا کارهای مقدماتی تدریس که بعد از داخل شدن به صنف برای یک معلم ضروری است انجام دهید، بعد چارت شکل ورودی صفحهٔ 53 کتاب درسی را پیش‌روی صنف آویزان نمایید؛ سپس سؤالی را که در این بخش طرح گردیده از شاگردان بپرسید و اگر آنها جواب درست ارائه کرده نتوانستند به آنها بگویید: ما بدون دریافت تزاید Δy و Δx میتوانیم مشتق تابع مذکور را طوری دریافت نماییم که توان ضریب قرار بگیرد و از توان یک واحد کم شود، که ما در این درس این قانون را مطالعه می‌نماییم.

فعالیت جریان درس: (28) دقیقه

شاگردان را به گروه های مناسب تقسیم نموده و به آنها وظیفه دهید تا فعالیت صفحهٔ 54 کتاب درسی را انجام دهند، در جریان کار گروهی از گروه‌ها نظارت به عمل آرید تا تمام شاگردان در فعالیت به صورت فعال سهم داشته باشند. اگر در اثنای اجرای فعالیت به مشکلی رو به رو گردیدند آنها را رهنمایی کنید. در ختم فعالیت از نمایندهٔ یک گروه بخواهید تا فعالیتی را که انجام داده اند به سایر شاگردان توضیح دهد.

نتیجهٔ فعالیت فوق را به شاگردان بیان نموده بعد آن را به اثبات برسانید طوری که شاگردان نیز سهم فعال داشته باشند.

مثال 1 صفحهٔ 54 کتاب درسی را روی تخته بنویسید و از یک شاگرد داوطلب بخواهید تا آن را حل کند، همزمان به سایر شاگردان وظیفه دهید تا همان مثال را به شکل انفرادی در کتابچه‌های شان حل کنند، هرگاه در حل سؤال روی تخته مشکلی وجود داشت از یک شاگرد دیگر بخواهید تا آن را اصلاح نماید، زمانی که مطمئن شدید حل سؤال روی تخته درست است از سایر شاگردان بخواهید تا سؤال حل شدهٔ کتابچه‌های شان را با سؤال حل شدهٔ روی تخته مقایسه نمایند تا اگر اشتباهی کرده باشد آن را اصلاح نمایند.

تحکیم درس: (7) دقیقه

برای این که شاگردان درس جدید را درست فراگیرند سؤال $f(x)=\frac{1}{2}x^2$ را روی تخته بنویسید و مشتق آن را در نقطهٔ $x=1$ دریافت نمایید تا شاگردان طریق دریافت مشتق یک تابع طاقت دار را درست بیاموزند.

ارزیابی ختم درس: (5) دقیقه

معلم محترم برای این که مطمئن شوید آیا شاگردان درس جدید را فرا گرفته اند یا خیر؟ ارزیابی کنید؛ طور مثال: از شاگردان بپرسید:

- کی میتواند مشتق تابع $f(x)=\frac{4}{2}x^2$ را در نقطهٔ $x=2$ دریافت کند؟

جواب به سؤال های تمرین

مشتق توابع زیر را دریابید.

1) $f(x)=x^{-2}$ 2) $x(t)=gt^2$ 3) $t(x)=x^8$

4) $f(x)=x^{\frac{2}{3}}$

حل 1): $f'(x)=-2x^{-2-1}=-2x^{-3}$

حل 2): $x'(t)=2gt^{2-1}=2gt$

حل 3): $t'(x)=8x^{8-1}=8x^7$

حل 4): $f'(x)=\frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1}=\frac{2}{3}x^{\frac{2-3}{3}}=\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}=\frac{2}{3}\cdot\sqrt[3]{x^{-1}}=\frac{2}{3}\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{x}}$

فصل دوم

عنوان درس: مشتق حاصل جمع و حاصل تفریق

صفحهٔ کتاب(55)

وقت تدریس: یک ساعت درسی

اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	• شاگردان مفهوم مشتق حاصل جمع و حاصل تفریق را بدانند. • شاگردان مشتق یک حاصل جمع و یک حاصل تفریق‌را دریافت کرده بتوانند. • شاگردان از دریافت مشتق یک حاصل جمع و یک حاصل تفریق احساس خوشی نمایند.
روش های تدریس	سؤال و جواب، کارهای گروهی و انفرادی
مواد ممد درسی	مواد مورد نیاز
توضیح ورودی (5) دقیقه	ابتدا کارهای مقدماتی تدریس که بعد از داخل شدن به صنف برای یک معلم ضروری است انجام دهید؛ طور مثال:(احوالپرسی، تنظیم صنف، اخذ حاضری، ملاحظهٔ کارخانه گی، ارزیابی مختصر درس گذشته، تأمین ارتباط درس گذشته با درس جدید) بعد به ارائهٔ درس جدید بپردازید.

فعالیت جریان درس: (28) دقیقه

شاگردان را به گروه های مناسب تقسیم نموده و به آنها وظیفه دهید تا فعالیت صفحهٔ 55 کتاب درسی را انجام دهند، در جریان کار گروهی از گروه‌ها نظارت به عمل آرید تا تمام شاگردان به صورت فعال در کار گروهی سهم داشته باشند. اگر در اثنای اجرای فعالیت به مشکلی رو به رو می‌شوند آنها را رهنمایی کنید. در ختم کارگروهی از نمایندهٔ یک گروه بخواهید تا فعالیتی را که انجام داده اند به دیگران توضیح دهد.

حال نتیجهٔ فعالیت فوق را به شاگردان بیان نموده و آن را ثبوت نمایید.

اکنون مثال 1 صفحهٔ 55 کتاب درسی را روی تخته بنویسید و آن را حل کنید طوری که شاگردان نیز در حل آن سهم فعال داشته باشند؛ به این معنی هنگام حل مثال از شاگردان همواره سؤال کنید و جواب‌های قناعت بخش به دست آورید تا شاگردان در حل مثال خود را سهیم بدانند.

تحکیم درس: (7) دقیقه

برای این که شاگردان درس جدید را خوبتر فراگیرند مثال 2 صفحهٔ 56 کتاب درسی را روی تخته بنویسید و از یک شاگرد داوطلب بخواهید تا آن را روی تخته حل نماید، همزمان به سایر شاگردان وظیفه دهید تا مثال مذکور را هر یک به شکل انفرادی در کتابچه‌های شان حل نمایند، اگر در حل سؤال روی تخته مشکلی وجود داشت از یک شاگرد دیگر بخواهید تا آن را اصلاح نماید، زمانی که مطمئن شدید که حل سؤال روی تخته درست است از سایر شاگردان بخواهید تا سؤال حل شدهٔ کتابچه‌های شان را با سؤال حل شدهٔ روی تخته مقایسه نمایند.

ارزیابی ختم درس: (5) دقیقه

معلم محترم برای این که مطمئن شوید آیا شاگردان درس جدید را خوب فرا گرفته اند یا خیر؟ ارزیابی نمایید؛ برای این کار اجزای 1 ، 2 و 3 مربوط به مثال 3 صفحۀ 56 کتاب درسی را روی تخته بنویسید و از سه شاگرد داوطلب بخواهید که هر کدام یکی از این اجزاء را حل نمایند.

معلومات اضافی برای معلم

ثبوت مشتق یک حاصل تفریق:

$$y = u - v$$
$$y + \Delta y = (u + \Delta u) - (v + \Delta v)$$
$$\Delta y = u + \Delta u - v - \Delta v - y$$
$$\Delta y = u + \Delta u - v - \Delta v - (u - v)$$
$$\Delta y = u + \Delta u - v - \Delta v - u + v$$
$$\Delta y = \Delta u - \Delta v \quad / : \Delta x$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} - \frac{\Delta v}{\Delta x}$$
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} - \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} \quad , \qquad \boxed{y' = u' - v'}$$

جواب به سؤال های تمرین

مشتق توابع الجبری زیر را دریابید.

حل 7)**:**

$$f(x) = 3x^5 - 5x^2$$
$$y = u - v \ \Rightarrow \ y' = u' - v'$$
$$u = 3x^5 \ \Rightarrow \ u' = 15x^4$$
$$v = -5x^2 \ \Rightarrow \ v' = -10x$$
$$f'(x) = 15x^4 - 10x$$

حل 8)**:**

$$f(x) = 7x + 3$$
$$u = 7x \ \Rightarrow \ u' = 7$$
$$v = 3 \ \Rightarrow \ v' = 0$$
$$y' = u' + v' \ \Rightarrow \ f'(x) = 7 + 0 = 7$$

فصل دوم

عنوان درس: مشتق حاصل ضرب

صفحۀ کتاب(56)

وقت تدریس: یک ساعت درسی

اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	• شاگردان مفهوم مشتق حاصل ضرب را بدانند. • شاگردان مشتق حاصل ضرب را دریافت کرده بتوانند. • شاگردان از دریافت مشتق یک حاصل ضرب احساس خوشی نمایند.
روش های تدریس	سؤال و جواب، کار گروهی و انفرادی
مواد ممد درسی	مواد مورد نیاز
توضیح ورودی (5) دقیقه	زمانی که به صنف داخل میشوید ابتدا کارهای مقدماتی تدریس که برای معلم انجام آن قبل از ارائۀ درس جدید ضروری است انجام دهید، بعد در مورد درس جدید تولید انگیزه نموده و به ارائۀ درس بپردازید.

فعالیت جریان درس: (28) دقیقه

شاگردان را به گروه های مناسب تقسیم نموده و به آنها وظیفه دهید تا فعالیت صفحۀ 56 کتاب درسی را انجام دهند در اثنای اجرای فعالیت از گروه‌ها نظارت کنید تا تمام شاگردان در فعالیت سهم فعال داشته باشند؛ همچنان اگر گروه‌ها در جریان اجرای فعالیت به مشکلی رو به رو شدند آنها را رهنمایی کنید.

در ختم فعالیت از نمایندۀ یک گروه بخواهید تا فعالیتی را که انجام داده اند به دیگران توضیح دهد. نتیجه‌یی که از فعالیت فوق به دست می‌آید آن را به شاگردان بیان نموده؛ سپس به اثبات برسانید.

در اثنای ثبوت سعی نمایید تا شاگردان نیز سهم فعال داشته باشند، مثال 1 صفحۀ 57 کتاب درسی را روی تخته بنویسید و بعد آن را حل نمایید طوری که شاگردان در حل مثال سهیم باشند؛ یعنی مثال را باسهم فعال شاگردان حل نمایید.

تحکیم درس: (7) دقیقه

برای این که شاگردان درس جدید را بهتر فرا گیرند مثال 2 صفحۀ 57 کتاب درسی را روی تخته بنویسید و از یک شاگرد داوطلب بخواهید تا آن را روی تخته حل نماید؛ همزمان از سایر شاگردان بخواهید تا هر کدام همان مثال را به صورت انفرادی در کتابچه‌های شان حل نمایند؛ اگر در حل سؤال روی تخته مشکلی وجود داشت از یک شاگرد دیگر بخواهید تا آن را اصلاح نمایند زمانی که مطمئن شدید حل مثال درست است از سایر شاگردان بخواهید تا سؤال حل شدۀ کتابچه‌های شان را با سؤال حل شدۀ روی تخته مقایسه نمایند.

ارزیابی ختم درس: (5) دقیقه

برای این که مطمئن شوید آیا شاگردان درس جدید را فرا گرفته اند یا خیر؟ ارزیابی نمایید؛ طور مثال: از شاگردان سؤال کنید:

- کی‌میتواند فورمول مشتق یک حاصل ضرب را بنویسد؛ یعنی اگر $y = u \cdot v$ باشد $y' = ?$

معلومات اضافی

در حالت خصوصی هرگاه $y = c \cdot u$ درحالی که *C=constant* و $u = f(x)$ باشد؛ پس داریم که:

$$y = c \cdot u \quad , \quad y' = c'u + c \cdot u'$$
$$y' = 0 + c \cdot u' \quad \Rightarrow \quad y' = c \cdot u'$$

جواب به سؤال های تمرین

مشتق توابع الجبری زیر را دریابید.

1) $f(x) = \frac{3}{5}x(x-2)$ 2) $g(x) = (2x-3)(x-3)$ 3) $f(x) = (2x-1)^2$

حل 1):

$$y = u \cdot v \quad \Rightarrow \quad y' = u'v + v'u$$
$$u = \frac{3}{5}x \quad \Rightarrow \quad u' = \frac{3}{5}$$
$$v = (x-2) \quad \Rightarrow \quad v' = 1$$
$$f'(x) = (\frac{3}{5}x)'(x-2) + (\frac{3}{5}x)(x-2)' = \frac{3}{5}(x-2) + \frac{3}{5}x \cdot 1$$
$$= \frac{3}{5}x - \frac{6}{5} + \frac{3}{5}x = \frac{3x-6+3x}{5} = \frac{6x-6}{5}$$

حل 2):

$$u = 2x-3 \quad \Rightarrow \quad u' = 2$$
$$v = x-3 \quad \Rightarrow v' = 1$$
$$g'(x) = (2x-3)'(x-3) + (2x-3)(x-3)' = 2(x-3) + (2x-3) \cdot 1$$
$$= 2x-6+2x-3 = 4x-9$$

حل 3):

$$f(x) = (2x-1)(2x-1)$$
$$u = 2x-1 \quad \Rightarrow \quad u' = 2$$
$$v' = 2x-1 \quad \Rightarrow \quad v' = 2$$
$$f'(x) = (2x-1)'(2x-1) + (2x-1)(2x-1)' = 2(2x-1) + (2x-1) \cdot 2$$
$$= 4x-2+4x-2 = 8x-4$$

فصل دوم

عنوان درس: مشتق حاصل تقسیم

صفحهٔ کتاب(57)

وقت تدریس: یک ساعت درسی

اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	• شاگردان مفهوم مشتق حاصل تقسیم را بدانند. • شاگردان مشتق یک حاصل تقسیم را دریافت کرده بتوانند. • شاگردان از حل سؤالات مشتق توابع که به شکل حاصل تقسیم اند احساس خوشی نمایند.
روش های تدریس	سؤال و جواب، کار گروهی و انفرادی
مواد ممد درسی	مواد مورد نیاز
توضیح ورودی (5) دقیقه	زمانی که به صنف داخل شدید ابتدا کارهای مقدماتی تدریس که بعد از داخل شدن در صنف اجرای آن برای هر معلم ضروری است انجام دهید؛ سپس به ارتباط درس جدید تولید انگیزه نموده؛ سپس به ارائهٔ آن بپردازید.

فعالیت جریان درس: (28) دقیقه

شاگردان را به گروه های مناسب تقسیم نموده و به هر گروه وظیفه دهید تا فعالیت صفحهٔ 57 کتاب درسی را انجام دهند. در جریان کارگروهی ضرور است از گروهها نظارت به عمل آرید و سعی نمایید تا تمام شاگردان در فعالیت سهم فعال داشته باشند؛ اگر در اثنای اجرای فعالیت گروهی به مشکلی رو به رو شدند آنها را رهنمایی کنید. در ختم کار گروهی از نمایندهٔ یک گروه تقاضا نمایید تا فعالیتی را که انجام داده اند به سایر شاگردان توضیح دهد.

نتیجه‌یی که از اجرای فعالیت مذکور به وجود می‌آید آن را به شاگردان بیان نموده بعد به ثبوت آن بپردازید. در جریان ثبوت کوشش نمایید تا شاگردان نیز سهم فعال داشته باشند.

اکنون مثال 1 صفحهٔ 58 کتاب درسی را روی تخته بنویسید و کنید. سعی نمایید که شاگردان در حل مثال مذکور به صورت فعال سهم داشته باشند؛ به این معنی که در هر مرحله از شاگردان سؤال نموده و جواب‌های قناعت بخش به دست آرید تا شاگردان خود را در حل مثال سهیم بدانند.

تحکیم درس: (7) دقیقه

برای این که شاگردان مفهوم درس جدید را بهتر فراگیرند، یادداشت صفحهٔ 58 کتاب درسی را به شاگردان توضیح نموده بعد مثال 2 صفحهٔ 59 کتاب درسی را روی تخته بنویسید و از یک شاگرد داوطلب بخواهید تا آن را روی تخته حل کند. همزمان از سایر شاگردان تقاضا نمایید تا همان مثال را هر یک به شکل انفرادی در کتابچه‌های شان حل نمایند؛ اگر در حل سؤال روی تخته مشکلی وجود داشت از یک شاگرد دیگر بخواهید تا آن را اصلاح نماید.

زمانی‌که مطمئن شدید حل سؤال روی تخته درست است از سایر شاگردان بخواهید تا سؤال حل شدۀ کتابچه‌های شان را با سؤال حل شدۀ روی تخته مقایسه نمایند تا اگر اشتباهی موجود باشد آن را اصلاح نمایند.

ارزیابی ختم درس: (5) دقیقه

برای این که مطمئن شوید آیا شاگردان درس جدید را فرا گرفته اند یا خیر؟ ارزیابی نمایید؛ برای این کار مثال 3 صفحهٔ 59 کتاب درسی را روی تخته بنویسید و از شاگردان بپرسید:

- کی‌میتواند این مثال را روی تخته بنویسید؟

وقتی که شاگردان دستان خود را بلند نمودند از یک شاگرد بخواهید تا مثال مذکور را روی تخته حل نماید.

معلومات اضافی

حالات خصوصی مشتق حاصل تقسیم:

الف: هرگاه به عوض $y=\frac{u}{v}$, $y=\frac{u}{c}$ باشد، در حالیکه *C=constant* و $u=f(x)$ باشد؛ پس مشتق حاصل تقسیم آنها مساوی است به:

$$y=\frac{u}{c}\ ,\quad y'=\frac{u'\cdot c-u\cdot c'}{c^2}\Rightarrow y'=\frac{u'\cdot c-u\cdot 0}{c^2}\Rightarrow y'=\frac{u'\cdot c}{c^2}\Rightarrow \boxed{y'=\frac{u'}{c}}$$

ب: هرگاه $y=\frac{c}{v}$ باشد، درحالی که *C= constant* و $v=g(x)\neq 0$ باشد؛ پس مشتق حاصل تقسیم‌آنها مساوی است به:

$$y=\frac{c}{v}\quad ,\qquad y'=\frac{c'\cdot v-c\cdot v'}{v^2}\Rightarrow y'=\frac{0\cdot v-c\cdot v'}{v^2}\Rightarrow \boxed{y'=\frac{-c\cdot v'}{v^2}}$$

جواب به سؤال های تمرین

مشتق توابع الجبری زیر را دریابید.

$$4)\ f(t)=\frac{t^2}{1-2t}\qquad 5)\ f(x)=\frac{1}{x^2-2}\qquad 6)\ f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$$

حل 4):

$$u=t^2\quad\Rightarrow u'=2t$$
$$v=(1-2t)\ \Rightarrow v'=-2$$
$$y'=\frac{u'\cdot v-v'\cdot u}{v^2}$$
$$f'(x)=\frac{(t^2)'\cdot(1-2t)-(1-2t)'\cdot t^2}{(1-2t)^2}=\frac{2t(1-2t)-(-2)\cdot t^2}{(1-2t)^2}=\frac{2t-4t^2+2t^2}{(1-2t)^2}=\frac{2t-2t^2}{(1-2t)^2}$$

حل 5):

$$u=1 \quad \Rightarrow u'=0$$

$$v=x^2-2 \quad \Rightarrow v'=2x$$

$$f'(x)=\frac{(1)'(x^2-2)-1(x^2-2)'}{(x^2-2)^2}=\frac{0(x^2-2)-2x}{(x^2-2)^2}=\frac{-2x}{(x^2-2)^2}$$

حل 6):

$$u=ax+b \quad \Rightarrow u'=a$$

$$v=cx+d \quad \Rightarrow v'=c$$

$$f'(x)=\frac{(ax+b)'(cx+d)-(ax+b)(cx+d)'}{(cx+d)^2}=\frac{a(cx+d)-(ax+b)\cdot c}{(cx+d)^2}$$

$$=\frac{acx+ad-acx-bc}{(cx+d)^2}=\frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$$

فصل دوم

عنوان درس: مشتق جذر مربع یک تابع

صفحهٔ کتاب(60)

وقت تدریس: یک ساعت درسی

اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	• شاگردان مفهوم مشتق جذرمربع را بفهمند. • شاگردان مشتق جذرمربع یک تابع را دریافت کرده بتوانند. • شاگردان از دریافت مشتق جذرمربع یک تابع احساس خوشی نمایند.
روش های تدریس	سؤال و جواب، کار گروهی و انفرادی
مواد ممد درسی	مواد مورد نیاز
توضیح ورودی (5) دقیقه	بعد از داخل شدن به صنف، کارهای مقدماتی تدریس را که اجرای آن برای هر معلم ضروری است انجام دهید؛ سپس به ارتباط درس جدید تولید انگیزه نموده، بعد به ارائهٔ درس جدید بپردازید.

فعالیت جریان درس: (28) دقیقه

شاگردان را به گروه های مناسب تقسیم نموده به هر گروه وظیفه دهید تا فعالیت صفحهٔ 60 کتاب درسی را انجام دهند. در جریان فعالیت از گروه‌ها نظارت نمایید تا تمام شاگردان در کار گروهی سهم فعال داشته باشند. اگر گروه‌ها در اجرای فعالیت به مشکلی رو به رو شدند آنها را رهنمایی کنید. در ختم کار گروهی از نمایندهٔ یک گروه بخواهید تا فعالیتی را که انجام داده اند به دیگران توضیح دهد.

نتیجه‌یی که از انجام فعالیت فوق به دست می‌آید به شاگردان بیان نموده، بعد آن را ثبوت نمایید طوری که شاگردان نیز سهم فعال داشته باشند؛ به این معنی که در هر مرحلهٔ ثبوت از شاگردان سؤال نموده و جواب‌های قناعت بخش به دست آرید.

مثال 1 صفحهٔ 60 کتاب درسی را روی تخته بنویسید و از یک شاگرد داوطلب بخواهید تا آن را روی تخته حل نماید، همزمان از سایر شاگردان بخواهید که مثال مذکور را هر یک به شکل انفرادی در کتابچه‌های شان حل نمایند. اگر در حل روی تخته اشتباهی وجود داشت از یک شاگرد دیگر بخواهید تا آن را اصلاح نماید، زمانی که مطمئن شدید حل سؤال روی تخته درست است از سایر شاگردان بخواهید تا سؤال حل شدهٔ کتابچه‌های شان را با سؤال حل شدهٔ روی تخته مقایسه نمایند تا اگر اشتباهی داشته باشد آن را اصلاح کنند.

تحکیم درس: (7) دقیقه

برای این که شاگردان موضوع درس جدید را خوبتر فرا گیرند آن را تحکیم بخشید برای این کار سؤال زیر را روی

تخته بنویسید و آن را حل نمایید، طوری که شاگردان در حل آن سهم فعال داشته باشند.

$$y=(x+2)+\sqrt{x}$$
$$y'=?$$

ارزیابی ختم درس: (5) دقیقه

معلم محترم برای این که مطمئن شوید آیا شاگردان درس جدید را فرا گرفته اند یا خیر؟ ارزیابی نمایید؛ طور مثال: از شاگردان بپرسید:

- اگر $y=\sqrt{x}$ باشد مشتق آن مساوی به چیست؛ یعنی $y'=?$

جواب به سؤال های تمرین

1- مشتق توابع زیر را دریابید.

$$1)\ f(x)=\frac{1}{x+1} \qquad 2)\ f(x)=3x^{-3} \qquad 3)\ f(x)=x^2+3$$

حل 1):

$$u=1 \quad \Rightarrow u'=0$$
$$v=x+1 \Rightarrow v'=1$$
$$y'=\frac{u'\cdot v-v'\cdot u}{v^2}$$
$$f'(x)=\frac{(1)'(x+1)-1(x+1)'}{(x+1)^2}=\frac{0(x+1)-1(1)}{(x+1)^2}=\frac{-1}{(x+1)^2}$$

حل 2):

$$y=x^n \quad \Rightarrow y'=nx^{n-1}$$
$$f'(x)=3(-3)x^{-3-1}=-9x^{-4}$$

حل 3):

$$u=x^2 \quad \Rightarrow u'=2x$$
$$v=3 \quad \Rightarrow v'=0$$
$$f'(x)=(x^2)'+(3)'=2x+0=2x$$

فصل دوم

عنوان درس: مشتق تابع $\sqrt{u}$

صفحهٔ کتاب(61)

وقت تدریس: یک ساعت درسی

اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	• شاگردان مفهوم مشتق جذرمربع را بدانند. • شاگردان مشتق توابع جذرمربع را دریافت کرده بتوانند. • شاگردان از دریافت مشتق جذرمربع احساس خوشی نمایند.
روش های تدریس	سؤال و جواب، کار گروهی و انفرادی
مواد ممد درسی	مواد مورد نیاز
توضیح ورودی (5) دقیقه	ابتدا کارهای مقدماتی را که بعد از داخل شدن به صنف برای هر معلم ضروری است انجام دهید، بعد در مورد درس جدید تولید انگیزه نمایید تا شاگردان به آموختن درس جدید آماده شوند.

فعالیت جریان درس: (28) دقیقه

شاگردان را به گروه های مناسب تقسیم نموده و به هر گروه وظیفه دهید تا فعالیت صفحهٔ 61 کتاب درسی را انجام دهند در جریان کار گروهی از گروه نظارت کنید تا تمام شاگردان در کار گروهی سهم فعال داشته باشند. اگر در جریان کار گروهی شاگردان به مشکلی رو به رو می‌شوند آنها را رهنمایی کنید. در ختم کار گروهی از نمایندهٔ یک گروه بخواهید تا فعالیتی را که انجام داده اند به دیگران توضیح دهد.

نتیجهٔ فعالیت فوق را به شاگردان بیان نموده بعد آن را ثبوت کنید؛ طوری که شاگردان نیز سهم فعال داشته باشند.

اکنون مثال 2 صفحهٔ 61 کتاب درسی را روی تخته بنویسید و از یک شاگرد داوطلب بخواهید تا آن را حل کند. همزمان از سایر شاگردان بخواهید تا مثال مذکور را هر یک به شکل انفرادی در کتابچه‌های شان حل نمایند؛ اگر در حل سؤال روی تخته مشکلی وجود داشت از یک شاگرد دیگر بخواهید تا آن را اصلاح کند؛ زمانی که مطمئن شدید حل سؤال روی تخته درست است از سایر شاگردان بخواهید تا سؤال حل شدهٔ کتابچه‌های شان را با سؤال حل شدهٔ روی تخته مقایسه نمایند.

تحکیم درس: (7) دقیقه

برای این که شاگردان مفهوم درس جدید را بهتر فرا گیرند مثال 3 صفحهٔ 62 کتاب درسی را روی تخته بنویسید و آن را حل کنید طوری که شاگردان نیز سهم فعال داشته باشند.

ارزیابی ختم درس: (5) دقیقه

برای این که مطمئن شوید آیا شاگردان درس جدید را فرا گرفته اند یا خیر؟ ارزیابی نمایید؛ طور مثال: از شاگردان بپرسید:

- اگر y تابع u و u تابع x باشد، کی میتواند بگوید که مشتق تابع y نظر به x مساوی به چیست؟ یعنی اگر $y = f(u)$ و $u = g(x)$ باشد؛ پس $y'_x = ?$ است؟

جواب به سؤال های تمرین

2- اگر $f(x) = x^2 - 3x$ و $g(x) = \sqrt{x} - 1$ باشد؛ مشتق حاصل جمع، حاصل ضرب و حاصل تقسیم این دو تابع را دریابید. $[(f+g)', (f \cdot g)', (f \div g)' \quad g \neq 0]$

حل:

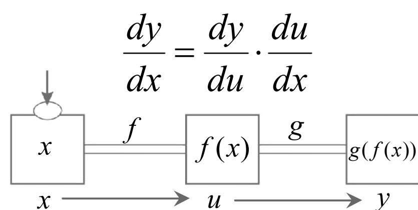
$$a)\ (f+g)'_{(x)} = [(x^2 - 3x) + (\sqrt{x} - 1)]' = [x^2 - 3x + \sqrt{x} - 1]' = 2x - 3 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$b)\ (f \cdot g)'_{(x)} = [(x^2 - 3x) \cdot (\sqrt{x} - 1)]' = (x^2 - 3x)'(\sqrt{x} - 1) + (x^2 - 3x)(\sqrt{x} - 1)'$$

$$= (2x - 3)(\sqrt{x} - 1) + (x^2 - 3x) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = 2x\sqrt{x} - 2x - 3\sqrt{x} + 3 + \frac{x^2}{2\sqrt{x}} - \frac{3x}{2\sqrt{x}}$$

$$c)\ (f \div g)_{(x)} = (\frac{f}{g})_{(x)} = [\frac{x^2 - 3x}{\sqrt{x} - 1}]' = \frac{(x^2 - 3x)'(\sqrt{x} - 1) - (x^2 - 3x)(\sqrt{x} - 1)'}{(\sqrt{x} - 1)^2}$$

$$= \frac{(2x - 3)(\sqrt{x} - 1) - (x^2 - 3x) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x} - 1)^2} = \frac{2x\sqrt{x} - 2x - 3\sqrt{x} + 3 - \frac{x^2}{2\sqrt{x}} + \frac{3x}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x} - 1)^2}$$



فصل دوم

عنوان درس: مشتق تابع مرکب(قاعدهٔ زنجیری)

صفحهٔ کتاب(63)

وقت تدریس(دو ساعت درسی) ساعت اول درسی(45 دقیقه)

اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	• شاگردان مفهوم مشتق تابع مرکب را بدانند. • شاگردان مشتق تابع مرکب را دریافت کرده بتوانند. • شاگردان از دریافت مشتق تابع مرکب احساس خوشی نمایند.
روش های تدریس	سؤال و جواب، کار گروهی و انفرادی
مواد ممد درسی	چارت شکل ورودی... .
توضیح ورودی (5) دقیقه	بعد از داخل شدن به صنف کارهای مقدماتی تدریس را که اجرای آن برای هر معلم ضروری است انجام دهید؛ سپس به توضیح بخش ورودی بپردازید؛ چارتی را که از قبل آماده نموده اید پیش‌روی صنف آویزان کرده بعد از شاگردان بپرسید: • $\frac{dy}{dx}$ چه مفهوم را ارائه می کند؟ • $\frac{dy}{du}$ و $\frac{du}{dx}$ کدام مفهوم را دارند، هر یک را به طور جداگانه بیان کنید؟ بعد توجه شاگردان را به طرف چارت شکل ورودی معطوف داشته و بگویید در شکل می‌بینید که y تابع u و u تابع x است و این را تابع، تابع یا تابع مرکب گویند و مشتق آن مساوی است به مشتق y نظر به u ضرب در مشتق u نظر به x.

فعالیت جریان درس: (28) دقیقه

شاگردان را به گروه های مناسب تقسیم نموده و به هر گروه وظیفه دهید تا فعالیت صفحهٔ 63 کتاب درسی را انجام دهند. در جریان کار گروهی از گروه‌ها نظارت نمایید تا تمام شاگردان در اجرای فعالیت سهم فعال داشته باشند. اگر گروه‌ها به کدام مشکلی رو به رو می‌شوند آنها را رهنمایی کنید. در ختم فعالیت از نمایندهٔ یک گروه بخواهید تا فعالیتی را که گروه مربوطهٔ شان انجام داده اند به دیگران توضیح دهد.

نتیجه‌یی که از انجام فعالیت فوق به دست می‌آید آن را به شاگردان بیان نموده بعد آن را ثبوت نمایید.

مثال 1 صفحهٔ 64 کتاب درسی را روی تخته بنویسید و آن را حل کنید طوری که شاگردان نیز سهم فعال داشته باشند.

مثال 2 صفحهٔ 64 کتاب درسی را روی تخته بنویسید و از یک شاگرد داوطلب بخواهید تا آن را روی تخته حل نماید، همزمان از سایر شاگردان بخواهید تا مثال مذکور را هر یک به طور انفرادی در کتابچه‌های شان حل نمایند. اگر در حل سؤال روی تخته مشکلی وجود داشت از یک شاگرد دیگر بخواهید تا آن را اصلاح نماید؛ زمانی که مطمئن شدید حل سؤال روی تخته درست است از سایر شاگردان بخواهید تا سؤال حل شدهٔ کتابچه‌های شان را با سؤال حل شدهٔ روی تخته مقایسه کنند تا اگر اشتباهی در حل سؤال داشته باشند آن را اصلاح نمایند.

تحکیم درس: (7) دقیقه

برای این که شاگردان مفهوم درس جدید را درست فراگیرند مثال 3 صفحهٔ 64 کتاب درسی را روی تخته بنویسید و آن را حل کنید طوری که شاگردان نیز در حل سؤال سهم فعال داشته باشند.

ارزیابی ختم درس: (5) دقیقه

برای این که مطمئن شوید آیا شاگردان درس جدید را فرا گرفته اند یا خیر؟ ارزیابی کنید، برای این کار از شاگردان بپرسید:

- کی می‌تواند بگوید؛ اگر y تابع u و u تابع x باشد، این تابع چه نوع تابع است؟
- کی می‌تواند بگوید که مشتق این تابع از کدام رابطه به دست می‌آید؟ روی تخته بنویسید.

معلومات اضافی

قضیه هرگاه $y = f(u)$ و $u = g(x)$ باشد، در این صورت داریم که:

$$y = f(u)$$
$$y + \Delta y = f(u + \Delta u)$$
$$\Delta y = f(u + \Delta u) - y$$
$$\Delta y = f(u + \Delta u) - f(u) \quad /:\Delta u$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta u} = \frac{f(u + \Delta u) - f(u)}{\Delta u}$$

از اطراف لیمیت می‌گیریم:

$$\lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{f(u + \Delta u) - f(u)}{\Delta u} = f(\Delta u)$$
$$\frac{dy}{du} = f'(u) \ \ldots \ I \qquad \text{یا} \qquad y'_u = f'(u)$$
$$u = g(x)$$
$$u + \Delta u = g(x + \Delta x)$$
$$\Delta u = g(x + \Delta x) - u$$
$$\Delta u = g(x + \Delta x) - g(x) \quad /:\Delta x$$
$$\frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x}$$

از اطراف لیمیت می‌گیریم:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} = g(\Delta x)$$
$$\frac{du}{dx} = g'(x) \ \ldots \ II \qquad \text{یا} \qquad u'_x = g'(x)$$

رابطهٔ I و II را باهم طرف به طرف ضرب نموده داریم که:

$$\frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = f'(u) \cdot g'(x)$$

$\frac{dy}{dx} = f'(u) \cdot g'(x)$ یا $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$ و یا هم $y'_x = y'_u \cdot u'_x$

جواب به سؤال های تمرین

مشتق توابع زیر را به دست آرید.

1) $y=(x^2+2)^2$ 2) $y=(x^3-4x^2+1)^{-4}$ 3) $y=(1-2x^3)^4$

حل 1)**:**

$$u=x^2+2 \Rightarrow u'=2x$$

$$y=u^2 \Rightarrow y'=2u$$

$$y'_{(x)}=y'_{(u)}\cdot u'_{(x)}$$

$$y'_{(x)}=2u\cdot 2x=2(x^2+2)\cdot 2x=4x(x^2+2)=4x^3+8x$$

حل 2)**:**

$$u=x^3-4x^2+1 \Rightarrow u'=3x^2-8x$$

$$y=u^{-4} \Rightarrow y'=-4u^{-4-1}=-4u^{-5}$$

$$y'_{(x)}=y'_{(u)}\cdot u'_{(x)}$$

$$y'_{(x)}=-4u^{-5}\cdot(3x^2-8x)=-4(x^3-4x^2+1)^{-5}\cdot(3x^2-8x)=\frac{-4(3x^2-8x)}{(x^3-4x^2+1)^5}$$

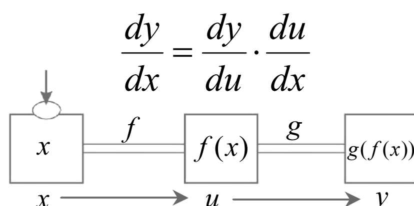
حل 3)**:**

$$u=1-2x^3 \Rightarrow u'=-6x^2$$

$$y=u^4 \Rightarrow y'=4u^3$$

$$y'_{(x)}=y'_{(u)}\cdot u'_{(x)}$$

$$y'_{(x)}=4u^3\cdot(-6x)^2=4(1-2x^3)^3\cdot(-6x^2)=-24x^2(1-2x^3)^3$$



فصل دوم

عنوان درس: مشتق تابع مرکب(قاعدۀ زنجیری)

صفحۀ کتاب(64)

وقت تدریس: ساعت دوم درسی

اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	• شاگردان مفهوم مشتق تابع مرکب را بدانند. • شاگردان مشتق تابع مرکب را دریافت کرده بتوانند. • شاگردان از دریافت مشتق تابع مرکب احساس خوشی نمایند.
روش های تدریس	سؤال و جواب، کار گروهی و انفرادی
مواد ممد درسی	چارت شکل ورودی... .
توضیح ورودی (5) دقیقه	ابتدا کارهای مقدماتی تدریس را که اجرای آن بعد از داخل شدن در صنف برای هر معلم ضروری است انجام دهید؛ سپس چارت شکل ورودی را که در ساعت اول درسی از آن استفاده نموده بودید بار دیگر پیش‌روی صنف آویزان نموده؛ مانند ساعت اول درسی یکبار دیگر بخش ورودی را تکرار کرده و سپس به ارائۀ درس جدید بپردازید.

فعالیت جریان درس: (28) دقیقه

شاگردان را به گروه های مناسب تقسیم نموده و به هر گروه وظیفه دهید تا مثال 4 صفحۀ 64 کتاب درسی را حل نمایند. در جریان کار گروهی از گروه‌ها نظارت نمایید تا تمام شاگردان در فعالیت سهم فعال داشته باشند؛ اگر شاگردان در اثنای اجرای فعالیت به مشکلی رو به رو می‌شوند آنها را رهنمایی کنید. در ختم فعالیت از نمایندۀ یک گروه بخواهید تا فعالیتی را که گروه شان انجام داده اند به دیگران توضیح کند.

مثال 5 صفحۀ 64 کتاب درسی را روی تخته بنویسید و از یک شاگرد داوطلب بخواهید تا آن را روی تخته حل نماید. همزمان از سایر شاگردان بخواهید تا مثال مذکور را در کتابچه‌های شان حل نمایند؛ اگر در حل سؤال روی تخته کدام اشتباهی وجود داشت از یک شاگرد دیگر بخواهید تا آن را اصلاح نماید. زمانی که مطمئن شدید که حل سؤال روی تخته درست است از سایر شاگردان بخواهید تا سؤال حل شدۀ کتابچه‌های شان را با سؤال حل شدۀ روی تخته مقایسه نمایند.

حال یادداشت شماره I صفحۀ 65 کتاب درسی را به شاگردان بیان نموده بعد مثال مربوط را روی تخته بنویسید و حل نمایید؛ طوری که در حل مثال شاگردان سهم فعال داشته باشند.

تحکیم درس: (7) دقیقه

برای این که شاگردان مفهوم درس جدید را بهتر بفهمند یادداشت شماره II صفحۀ 65 کتاب درسی را به شاگردان

بیان نمایید بعد مثال مربوط را روی تخته بنویسید و سپس آن را حل نمایید، طوری که در حل مثال به شاگردان سهم فعال بدهید.

ارزیابی ختم درس: (5) دقیقه

برای این که مطمئن شوید آیا شاگردان درس جدید را فرا گرفته اند یا خیر؟ ارزیابی کنید برای این کار از شاگردان بپرسید:

- کی میتواند مشتق تابع زیر را دریافت کند:

$$y = (x^3 + 2)^4$$
$$y' = ?$$

معلومات اضافی

مشتق راست و چپ یک تابع در نقطهٔ x_0:

- مشتق چپ تابع f در نقطهٔ x_0 را با $f'-(x_0)$ یا $f'(x_0-)$ نمایش داده و چنین تعریف می‌کنند:

$$f'_-(x_0) = \lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = l_1 \quad \text{یا} \quad f'_-(x_0) = \lim_{h\to 0^-}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = l_1$$

اگر l_1 عدد حقیقی باشد، می‌گویند l_1 مشتق چپ تابع f در نقطهٔ x_0 است.

- مشتق راست تابع f در نقطهٔ x_0 را با $f'+(x_0)$ یا $f'(x_0+)$ نمایش داده و چنین تعریف می‌کنند:

$$f'_+(x_0) = \lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = l_2 \quad \text{یا} \quad f'_+(x_0) = \lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = l_2$$

در صورتی‌که l_2 عدد حقیقی باشد، l_2 را مشتق راست تابع f در نقطهٔ x_0 می‌نامند.

جواب به سؤال های تمرین

مشتق توابع زیر را به دست آرید:

$$4)\, y = \sqrt{\frac{1-z}{1+z}} \qquad 5)\;\; y = \sqrt[3]{3t+1} \qquad 6)\;\; y = \frac{1}{\sqrt{2+x^2+x^3}}$$

حل 4):

$$u = \frac{1-z}{1+z} \;\Rightarrow\; u' = \frac{(1-z)'(1+z)-(1-z)(1+z)'}{(1+z)^2}$$
$$= \frac{-1(1+z)-(1-z)\cdot 1}{(1+z)^2} = \frac{-1-z-1+z}{(1+z)^2} = \frac{-2}{(1+z)^2}$$
$$y = \sqrt{u} \quad \Rightarrow\; y' = \frac{1}{2\sqrt{u}}$$
$$y'_{(x)} = y'_{(u)}\cdot u'_{(x)}$$
$$y'_{(x)} = \frac{1}{2\sqrt{u}}\cdot\frac{-2}{(1+z)^2} = \frac{-2}{2\sqrt{\frac{1-z}{1+z}}(1+z)^2}$$

حل 5):

$$u = 3t + 1 \;\Rightarrow\; u' = 3$$

$$y = \sqrt[3]{u} \quad \Rightarrow\; y' = \frac{u'}{3\sqrt[3]{u^{3-1}}} = \frac{3}{3\sqrt[3]{u^2}}$$

$$y'_{(x)} = y'_{(u)} \cdot u'_{(x)}$$

$$y'_{(x)} = \frac{3}{3\sqrt[3]{u^2}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{(3t+1)^2}}$$

حل 6):

$$y = \frac{1}{\sqrt{2 + x^2 + x^3}} = (2 + x^2 + x^3)^{-\frac{1}{2}}$$

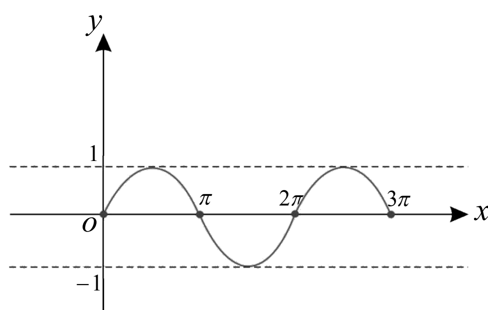
$$u = 2 + x^2 + x^3 \;\Rightarrow\; u' = 2x + 3x^2$$

$$y = u^{-\frac{1}{2}} \qquad \Rightarrow\; y' = -\frac{1}{2}u^{-\frac{3}{2}}$$

$$y'_{(x)} = y'_{(u)} \cdot u'_{(x)}$$

$$y'_{(x)} = -\frac{1}{2}u^{-\frac{3}{2}} \cdot (2x + 3x^2) = -\frac{1}{2}(2 + x^2 + x^3)^{-\frac{3}{2}} \cdot (2x + 3x^2) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{2x + 3x^2}{(2 + x^2 + x^3)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \frac{2x + 3x^2}{\sqrt{(2 + x^2 + x^3)^3}} = \frac{-2x - 3x^2}{2\sqrt{(2 + x^2 + x^3)^3}}$$



فصل دوم

عنوان درس: مشتق توابع مثلثاتی

صفحهٔ کتاب(67)

وقت تدریس: یک ساعت درسی

اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	• شاگردان مفهوم مشتق توابع مثلثاتی را بدانند. • شاگردان مشتق توابع مثلثاتی را دریافت کرده بتوانند. • شاگردان از دریافت مشتق توابع مثلثاتی احساس خوشی نمایند.
روش های تدریس	سؤال و جواب، کار گروهی و انفرادی
مواد ممد درسی	چارت شکل ورودی... .
توضیح ورودی (5) دقیقه	زمانی که داخل صنف شدید ابتدا کارهای مقدماتی تدریس را که اجرای آن برای هر معلم ضروری است انجام دهید. برای توضیح ورودی چارتی را که از قبل آماده نموده اید پیشروی صنف آویزان کنید و از شاگردان سؤال بخش ورودی را بپرسید. اگر از شاگردان جواب قناعت بخش به دست نیاوردید به آنها بگویید گرافی را که در سیستم کمیات وضعیهٔ قایم می‌بینید گراف تابع ساین زاویه را نشان می‌دهد که از مبدأ آغاز در قیمت $\frac{\pi}{2}$ دارای یک اعظمی و در قیمت π با محور x تقاطع نموده و در قیمت $\frac{3\pi}{2}$ دارای یک اصغری و در قیمت 2π دوباره با محور x تقاطع نموده و یک پریود آن تکمیل گردیده و به همین ترتیب ادامه می‌یابد. ناگفته نماند که دامنهٔ منحنی همیشه بین 1 و(-1) تحول می کند، به این معنی که از یک بزرگ و از (-1) کوچک شده نمی‌تواند.

فعالیت جریان درس: (28) دقیقه

شاگردان را به گروه های مناسب تقسیم نموده و به هر گروه وظیفه دهید تا فعالیت صفحهٔ 67 کتاب درسی را انجام دهند. در جریان کار گروهی از گروه‌ها نظارت نمایید تا تمام شاگردان در فعالیت به صورت فعال سهم داشته باشند و اگر در اثنای اجرای فعالیت شاگردان به مشکلی رو به رو می‌شوند آنها را رهنمایی کنید. در ختم فعالیت از نمایندهٔ یک گروه بخواهید تا فعالیتی را که انجام داده اند به دیگران توضیح دهد.

حال نتیجهٔ فعالیت فوق را به شاگردان بیان نموده بعد آن را طوری ثبوت نمایید تا شاگردان نیز سهم فعال داشته باشند.

اکنون مثال1 صفحهٔ 68 کتاب درسی را روی تخته بنویسید و از یک شاگرد داوطلب بخواهید تا آن را روی تخته حل کند، همزمان از سایر شاگردان بخواهید تا مثال مذکور را هر یک به صورت انفرادی در کتابچه‌های شان حل کنند، زمانی که مطمئن شدید حل سؤال روی تخته درست است از شاگردان بخواهید تا حل‌های شان را با حل سؤال روی تخته مقایسه کنند.

تحکیم درس: (7) دقیقه

برای این که شاگردان درس جدید را بهتر بیاموزند مثال 2 صفحهٔ 67 کتاب درسی را روی تخته بنویسید و آن را طوری حل نمایید که شاگردان نیز سهم فعال داشته باشند؛ یعنی هنگام حل مثال از شاگردان سؤال نموده و جواب‌های قناعت بخش به دست آرید تا آنها خود را در حل مثال سهیم بدانند.

ارزیابی ختم درس: (5) دقیقه

برای این که مطمئن شوید آیا شاگردان درس جدید را فرا گرفته اند یا خیر؟ تابع $y=\sin 2x$ را روی تخته بنویسید و از شاگردان بپرسید:

- کی میتواند مشتق تابع مذکور را روی تخته دریافت کند؟

جواب به سؤال های تمرین

مشتق توابع زیر را دریابید:

$$a)\ y=\sin 5x \qquad b)\ y=\frac{\sin x}{1+x} \qquad c)\ y=\sqrt{1+\sin x}$$

حل $a)$:

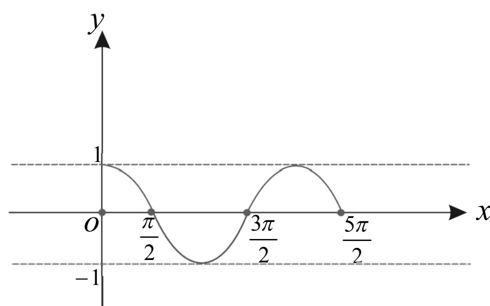
$$u=5x \Rightarrow u'=5$$
$$y=\sin u \Rightarrow y'=u'\cos u$$
$$\Rightarrow y'=5\cos 5x$$

حل $b)$:

$$u=\sin x \Rightarrow u'=\cos x$$
$$v=1+x \Rightarrow v'=1$$
$$y'=\frac{(\sin x)'(1+x)-(\sin x)(1+x)'}{(1+x)^2}=\frac{\cos x(1+x)-\sin x\cdot 1}{(1+x)^2}=\frac{\cos x+\cos x^2-\sin x}{(1+x)^2}$$

حل $c)$:

$$u=1+\sin x \Rightarrow u'=\cos x$$
$$y=\sqrt{u} \Rightarrow y'=\frac{u'}{2\sqrt{u}} \quad , \quad u=\sqrt{1+\sin x} \Rightarrow u'=\cos x$$
$$y'=\frac{\cos x}{2\sqrt{1+\sin x}}$$



فصل دوم

عنوان درس: مشتق تابع مثلثاتی $\cos x$

صفحهٔ کتاب(69)

وقت تدریس: یک ساعت درسی

اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	• شاگردان مفهوم مشتق تابع مثلثاتی cos یک زاویه را بدانند. • شاگردان مشتق تابع مثلثاتی cos یک زاویه را محاسبه کرده بتوانند. • شاگردان از دریافت مشتق cos یک زاویه احساس خوشی نمایند.
روش های تدریس	سؤال و جواب، کار گروهی و انفرادی
مواد ممد درسی	چارت شکل ورودی... .
توضیح ورودی (5) دقیقه	ابتدا کارهای مقدماتی تدریس را که بعد از داخل شدن در صنف اجرای آن برای هر معلم ضروری است انجام دهید. بعد طور زیر به توضیح بخش ورودی بپردازید: چارتی را که از قبل آماده نموده اید پیش‌روی صنف آویزان کنید؛ بعد از شاگردان بپرسید این شکل گراف چه نوع تابع را نشان می‌دهد؟ سعی کنید تا از شاگردان جواب قناعت بخش به دست آرید در غیر آن شما به آنها بگویید شکل ورودی گراف تابع $\cos x$ را نشان میدهد. طوری که گراف بالای محور y از $+1$ آغازگردیده، محور x را در نقطهٔ $\frac{\pi}{2}$ قطع نموده و در قیمت π دارای یک اصغری می‌باشد؛ همچنان گراف مذکور، محور x را در نقطهٔ $\frac{3\pi}{2}$ قطع نموده و در نقطهٔ 2π دارای یک اعظمی می‌باشد که به این ترتیب یک پریود آن تکمیل و به همین ترتیب ادامه می‌یابد. ناگفته نباید گذاشت که این گراف بین $+1$ و -1 تحول می کند.

فعالیت جریان درس: (28) دقیقه

شاگردان را به گروه های مناسب تقسیم نموده و به هر گروه وظیفه دهید تا فعالیت صفحهٔ 69 کتاب درسی را انجام دهند. در جریان کار گروهی از گروه‌ها نظارت به عمل آرید تا تمام شاگردان در کار گروهی به صورت فعال سهم داشته باشند؛ اگر شاگردان در اثنای اجرای فعالیت به مشکلی رو به رو می‌شوند آنها را رهنمایی کنید. در ختم کار گروهی از نمایندهٔ یک گروه بخواهید تا فعالیتی را که انجام داده اند به دیگران توضیح نماید.

نتیجهٔ فعالیت فوق را به شاگردان بیان نموده بعد آن را طوری به اثبات برسانید که شاگردان نیز سهم فعال داشته باشند.

مثال 1 صفحهٔ 70 کتاب درسی را روی تخته بنویسید و از یک شاگرد داوطلب بخواهید تا آن را روی تخته حل نماید. همزمان از سایر شاگردان بخواهید تا هر یک به شکل انفرادی مثال مذکور را در کتابچه‌های شان حل نمایند. اگر در حل روی تخته مشکلی وجود داشت از یک شاگرد داوطلب دیگر بخواهید تا آن را اصلاح نماید زمانی که مطمئن شدید که حل سؤال روی تخته درست است از سایر شاگردان بخواهید تا سؤال حل شدهٔ کتابچه‌های شان را با سؤال حل شدهٔ روی تخته مقایسه نمایند تا اگر اشتباهی در حل سؤال داشته باشند به اصلاح آن بپردازند.

تحکیم درس: (7) دقیقه

معلم برای این که شاگردان درس جدید را بهتر فرا گیرند 2 تمرین صفحهٔ 70 کتاب درسی را روی تخته بنویسید و به شیوۀ سؤال و جواب روی تخته حل کند.

ارزیابی ختم درس: (5) دقیقه

برای این‌که مطمئن شوید آیا شاگردان درس جدید را فرا گرفته اند یا خیر؟ ارزیابی نمایید و برای این کار از شاگردان بپرسید:

- کی میتواند مشتق تابع $f(x)=\cos x$ را روی تخته دریافت کند؛ یعنی ؟ $f'(x)=?$

جواب به سؤال های تمرین

مشتق مرتبۀ اول توابع زیر را دریابید:

1) $f(x)=(\sec 2x+\tan 2x)^2$ 2) $f(x)=\sin^2 x$ 3) $f(x)=\sec x$

4) $f(x)=\cos ec\, x$ 5) $f(x)=\dfrac{5\sin^2 2x}{3\cos 5x}$

حل 1):

$$f'(x)=2(\sec 2x+\tan 2x)(\sec 2x+\tan 2x)'=2(\sec 2x+\tan 2x)(2\sec 2x\cdot\tan 2x+2\sec^2 2x)$$

$$=2(2\sec^2 2x\cdot\tan 2x+2\sec^3 2x+2\sec 2x\cdot\tan 2x+2\sec^2 2x\cdot\tan 2x)$$

$$=\underbrace{4\sec^2 2x\cdot\tan 2x}+4\sec^3 2x+4\sec 2x\cdot\tan 2x+\underbrace{4\sec^2 2x\cdot\tan 2x}_{3}$$

$$=8\sec^2 2x\cdot\tan 2x+4\sec x^3 2x+4\sec 2x\cdot\tan 2x$$

حل 2): $f'(x)=2\sin x\cdot\cos x=\sin 2x$

حل 3):

$$f(x)=\sec x=\frac{1}{\cos x}$$

$$f'(x)=\frac{0-(-\sin x)}{\cos^2 x}=\frac{\sin x}{\cos^2 x}$$

حل 4):

$$f(x)=\csc x=\frac{1}{\sin x}$$

$$f'(x)=\frac{-\cos x}{\sin^2 x}\ \Rightarrow\ f'(x)=-\frac{\cos x}{\sin x}\cdot\frac{1}{\sin x}=-\cot x\cdot\csc x$$

حل 5):

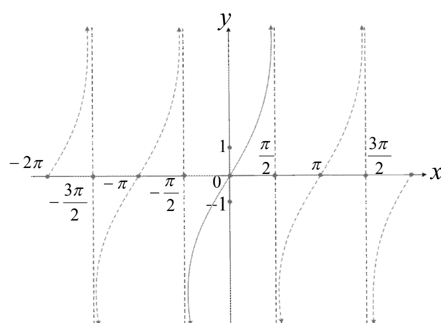
$$u=5\sin^2 2x\ \Rightarrow\ u'=5(2\sin 2x\cdot 2\cos 2x)=20\sin 2x\cdot\cos 2x$$

$$v=3\cos 5x\ \Rightarrow\ v'=3(5)(-\sin 5x)=-15\sin 5x$$

$$f'(x)=\frac{(5\sin^2 2x)'(3\cos 5x)-(5\sin^2 2x)(3\cos 5x)'}{(3\cos 5x)^2}$$

$$=\frac{(20\sin 2x\cdot\cos 2x)(3\cos 5x)-(5\sin^2 2x)(-15\sin 5x)}{(3\cos 5x)^2}$$

$$=\frac{60\sin 2x\cdot\cos 2x\cdot\cos 5x+75\sin^2 2x\cdot\sin 5x}{(3\cos 5x)^2}$$



فصل دوم

عنوان درس: مشتق تابع مثلثاتی $y = \tan x$

صفحهٔ کتاب(71)

وقت تدریس: یک ساعت درسی

اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	• شاگردان مفهوم مشتق تابع $y = \tan x$ را بفهمند. • شاگردان مشتق تانجنت یک زاویه را دریافت کرده بتوانند. • شاگردان از دریافت مشتق تانجنت یک زاویه احساس خوشی نمایند.
روش های تدریس	سؤال و جواب، کار گروهی و انفرادی
مواد ممد درسی	چارت شکل ورودی... .
توضیح ورودی (5) دقیقه	زمانی که به صنف داخل شدید ابتدا کارهای مقدماتی تدریس را که اجرای آن برای هر معلم ضروری است انجام دهید بعدطور زیر به توضیح بخش ورودی بپردازید: چارت شکل ورودی را که از قبل آماده نموده اید پیش‌روی صنف آویزان کنید و از شاگردان بپرسید: گراف مقابل چه نوع تابع را نشان میدهد؟ کوشش کنید که از شاگردان جواب قناعت بخش به دست آرید در غیر آن به آنهابگویید همانطوری که شما قبلاً گراف‌های توابع ساین و کوساین یک زاویه را ملاحظه نمودید گراف شکل ورودی چارت گراف تابع تانجنت یک زاویه را نشان میدهد؛ به طور مثال اگر شما دو مجانب که موازی به محور y رسم شده و محور x را در نقاط $\frac{\pi}{2}$ و $\frac{3\pi}{2}$ قطع نموده مد نظر بگیرید یکی از این گراف‌ها از منفی بی‌نهایت از مجاورت مجانبی که محور x را در $\frac{\pi}{2}$ قطع نموده صعود کرده بالآخره محور x را در نقطهٔ π قطع می کند، محدبیت خود را به مقعریت تبدیل کرده به طرف مجانبی که محور x را در نقطهٔ $\frac{3\pi}{2}$ قطع می‌نماید خود را نزدیک نموده و در مجاورت آن به طرف بالا صعود کرده می کند که گراف تانجنت یک زاویه است.

فعالیت جریان درس: (28) دقیقه

شاگردان را به گروه های مناسب تقسیم نموده و به هر گروه وظیفه دهید تا فعالیت صفحهٔ 71 کتاب درسی را انجام دهند. در جریان کار گروهی از گروه‌ها نظارت نمایید تا تمام شاگردان در فعالیت به صورت فعال سهم داشته باشند. اگر در جریان انجام فعالیت به مشکلی رو به رو شوند آنها را رهنمایی کنید. در ختم کارگروهی از نمایندهٔ یک گروه بخواهید تا فعالیتی را که انجام داده اند به دیگران توضیح دهد.

نتیجهٔ فعالیت فوق را روی تخته بنویسید وآن را ثبوت کنید. طوری که درجریان ثبوت شاگردان نیز سهم فعال داشته باشند.

اکنون مثال 1 صفحهٔ 71 کتاب درسی را روی تخته بنویسید و از یک شاگرد داوطلب بخواهید تا آن را روی تخته حل نماید. همزمان از سایر شاگردان بخواهید تا هر یک مثال متذکره را به شکل انفرادی در کتابچه‌های شان حل نمایند. اگر در حل سؤال روی تخته اشتباهی وجود داشت از یک شاگرد داوطلب بخواهید تا آن را اصلاح نماید زمانی که مطمئن شدید حل سؤال روی تخته درست است از سایر شاگردان بخواهید تا سؤال حل شدهٔ کتابچه‌های شان را با سؤال حل شدهٔ روی تخته مقایسه نمایند.

تحکیم درس: (7) دقیقه

برای این که شاگردان مفهوم درس جدید را بهتر فرا گیرند مثال 2 صفحهٔ 72 کتاب درسی را روی تخته بنویسید و آن را طوری حل نمایید که شاگردان نیز در حل آن سهم فعال داشته باشند.

ارزیابی ختم درس: (5) دقیقه

برای این که مطمئن شوید آیا شاگردان درس جدید را فرا گرفته اند یا خیر؟ ارزیابی نمایید، برای این کار از شاگردان بپرسید:

- کی میتواند بنویسد که مشتق تابع $y=\tan x$ مساوی به چیست؟ یعنی $y'=?$

معلومات اضافی

مشتق تابع مثلثاتی $\cot x$:

ثبوت:

$$f(x)=\cot x=\frac{\cos x}{\sin x}$$

$$f'(x)=\frac{(\cos x)'\cdot\sin x-\cos x\cdot(\sin x)'}{(\sin x)^2}=\frac{-\sin x\cdot\sin x-\cos x\cdot\cos x}{\sin^2 x}=\frac{-\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin^2 x}$$

$$=\frac{-1}{\sin^2 x}=-\csc^2 x$$

جواب به سؤال های تمرین

مشتق توابع زیر را دریابید:

$a)\ y=\tan x\cdot\cot x$ $\qquad b)\ y=(x^2+x-1)\cdot\tan^2 x$

$c)\ y=\dfrac{1}{\tan x}$ $\qquad d)\ y=\tan x\sec x-\cot x$

حل a):

$$y = \tan x \cdot \cot x = 1 \quad \Rightarrow \quad y' = 0$$

و یا به این طریقه:

$$u = \tan x \quad \Rightarrow \quad u' = \sec^2 x$$
$$v = \cot x \quad \Rightarrow \quad v' = -\csc^2 x$$
$$y' = (\tan x)' \cdot \cot x + \tan x \cdot (\cot x)' = \sec^2 x \cdot \cot x + \tan x \cdot (-\csc^2 x)$$
$$= \sec^2 x \cdot \cot x - \csc^2 x \cdot \tan x = 0$$

حل b):

$$u = x^2 + x - 1 \quad \Rightarrow \quad u' = 2x + 1$$
$$v = \tan^2 x \quad \Rightarrow \quad v' = 2\tan x \cdot \sec^2 x$$
$$y' = (x^2 + x - 1)' \cdot \tan^2 x + (x^2 + x - 1) \cdot (\tan^2 x)' = (2x+1) \cdot \tan^2 x + (x^2 + x - 1)(2\tan x \cdot \sec^2 x)$$
$$= 2x \cdot \tan^2 x + \tan^2 x + 2x^2 \cdot \tan x \cdot \sec^2 x + 2x \cdot \tan x \cdot \sec^2 x - 2\tan x \cdot \sec^2 x$$

حل c):

$$u = 1 \quad \Rightarrow \quad u' = 0$$
$$v = \tan x \quad \Rightarrow \quad v' = \sec^2 x$$
$$y' = \frac{(1)' \cdot \tan x - 1(\tan x)'}{(\tan x)^2} = \frac{0 \cdot \tan x - 1(\sec^2 x)}{(\tan x)^2} = \frac{-\sec^2 x}{(\tan x)^2}$$

حل d):

$$u = \tan x \cdot \sec x \quad \Rightarrow \quad u' = (\tan x)' \cdot \sec x + \tan x \cdot (\sec x)' = \sec^2 x \cdot \sec x + \tan x \cdot \sec x \cdot \tan x$$
$$= \sec^3 x + \tan^2 x \cdot \sec x$$
$$v = \cot x \quad \Rightarrow \quad v' = -\cos ec^2 x$$
$$y' = (\tan x \cdot \sec x)' \cdot \cot x + \tan x \cdot \sec x (\cot x)'$$
$$y' = \sec^3 x + \tan^2 x \cdot \sec x + \csc^2 x$$

$$y'_{(x)} = -\frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}}$$

فصل دوم

عنوان درس: مشتقات ضمنی

صفحهٔ کتاب(73)

وقت تدریس: یک ساعت درسی

اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	• شاگردان مفهوم مشتقات ضمنی را بدانند. • شاگردان مشتقات ضمنی یک تابع را دریافت کرده بتوانند. • شاگردان از دریافت مشتقات ضمنی توابع، احساس خوشی نمایند.
روش های تدریس	سؤال و جواب، کار گروهی و انفرادی
مواد ممد درسی	چارت شکل ورودی... .
توضیح ورودی (5) دقیقه	ابتدا کارهای مقدماتی تدریس را که بعد از داخل شدن به صنف برای هر معلم ضروری است انجام دهید. بعد طور ذیل به توضیح بخش ورودی بپردازید: چارتی را که از قبل آماده نموده اید پیش‌روی صنف آویزان کنید؛ سپس به شاگردان وظیفه دهید تا افاده‌یی را که در شکل چارت ورودی می‌بینید به عبارت بنویسند، اگر شاگردان از تحریر آن عاجز مانندند شما بنویسید که:(مشتق تابع y نظر به x مساویست به منفی مشتق تابع f نظر به x تقسیم مشتق تابع f نظر به محور y).

فعالیت جریان درس: (28) دقیقه

شاگردان را به گروه های مناسب تقسیم نموده و به هر گروه وظیفه دهید تا فعالیت صفحهٔ 73 کتاب درسی را انجام دهند. در جریان فعالیت از گروه‌ها مراقبت نمایید تا تمام شاگردان در فعالیت سهم فعال داشته باشند؛ اگر در جریان انجام فعالیت شاگردان به مشکلی رو به رو می‌شوند آنها را رهنمایی کنید.

نتیجهٔ فعالیت فوق را طوری که در صفحهٔ 73 و سه سطر بالایی صفحهٔ 74 تذکر داده شده است به شاگردان طوری توضیح دهید که شاگردان نیز سهم فعال داشته باشند.

اکنون مثال 1 صفحهٔ 74 کتاب درسی را روی تخته بنویسید و از یک شاگرد داوطلب بخواهید تا آن را روی تخته حل نماید. همزمان از سایر شاگردان بخواهید تا مثال مذکور را به شکل انفرادی در کتابچه‌های شان حل نمایند؛ اگر در حل سؤال روی تخته مشکلی وجود داشت از یک شاگرد دیگر بخواهید تا آن را اصلاح نماید. زمانی که مطمئن شدید حل سؤال روی تخته درست است از شاگردان بخواهید تا سؤال حل شدهٔ کتابچه‌های شان را با سؤال حل شدهٔ روی تخته مقایسه کنند تا اگر اشتباهی داشته باشند آن را اصلاح نمایند.

تحکیم درس: (7) دقیقه

معلم محترم،برای این که شاگردان مفهوم درس جدید را بهتر بفهمند مثال 2 صفحهٔ 74 کتاب درسی را روی تخته بنویسید و حل نمایید طوری که شاگردان نیز در حل مثال سهم فعال داشته باشند.

ارزیابی ختم درس: (5) دقیقه

برای این که مطمئن شوید آیا شاگردان درس جدید را فرا گرفته اند یا خیر؟ ارزیابی کنید، برای این کار مثال 3 صفحهٔ 75 کتاب درسی را روی تخته بنویسید و از یک شاگرد بخواهید تا آن را حل کند.

جواب به سؤال های تمرین

1. مشتق ضمنی رابطهٔ $x\sin y + y\cos x = 5$ را دریابید.

حل

$$x\sin y + y\cos x = 5$$

$$x\sin y + y\cos x - 5 = 0$$

$$f'_{(x)} = \sin y + y(-\sin x)$$

$$f'_{(y)} = x\cdot\cos y + \cos x$$

$$y'_{(x)} = -\frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}} = -\frac{\sin y - y\sin x}{x\cos y + \cos x} = \frac{y\sin x - \sin y}{x\cos y + \cos x}$$

2. از رابطهٔ $x^3 + xy^2 + y = 3$ مشتق ضمنی بگیرید.

حل

$$x^3 + xy^2 + y = 3$$

$$x^3 + xy^2 + y - 3 = 0$$

$$f'_{(x)} = 3x^2 + y^2$$

$$f'_{(y)} = 2xy + 1$$

$$y'_{(x)} = -\frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}} = -\frac{3x^2 + y^2}{2xy + 1} = \frac{-y^2 - 3x^2}{2xy + 1}$$

فصل دوم

عنوان درس: مشتق دوم ضمنی تابع

صفحهٔ کتاب(75)

وقت تدریس: یک ساعت درسی

اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	• شاگردان مفهوم مشتق دوم ضمنی یک تابع را بفهمند. • شاگردان مشتق دوم ضمنی توابع را دریافت کرده بتوانند. • شاگردان از دریافت مشتق دوم ضمنی توابع احساس خوشی نمایند.
روش های تدریس	سؤال و جواب، کار گروهی
مواد ممد درسی	مواد مورد نیاز
توضیح ورودی (5) دقیقه	زمانی که به صنف داخل شدید کارهای مقدماتی را؛ مانند(ادای سلام، احوالپرسی، تنظیم صنف، اخذحاضری، ملاحظهٔ کارخانه‌گی، تکرار مختصر درس گذشته و تأمین ارتباط آن با درس جدید) را انجام دهید. چون این درس بخش ورودی ندارد؛ بنا بر این با تولید انگیزه وارد جریان درس جدید شوید.

فعالیت جریان درس: (28) دقیقه

شاگردان را به گروه های مناسب تقسیم نموده و به آنها وظیفه دهید تا مثال اول صفحهٔ 75 کتاب درسی را اعضای هر گروه بعد از جروبحث با یکدیگر حل نمایند. در جریان کارگروهی از گروهها نظارت نمایید تا تمام شاگردان در اجرای فعالیت سهم فعال داشته باشند؛ اگر اعضای گروه در اثنای فعالیت به مشکلی رو به رو شدند آنها را رهنمایی کنید.

در ختم کارگروهی از نمایندهٔ یک گروه بخواهید تا فعالیتی را که گروه مربوط شان انجام داده است به دیگران توضیح دهد.

مثال2صفحهٔ 76 کتاب درسی را روی تخته بنویسید و آن را حل کنید طوری که شاگردان در حل مثال سهم فعال داشته باشند؛ به این معنی که هنگام حل مثال در هر قسمت از شاگردان سؤال کنید و سعی نمایید تا از آنها جواب قناعت بخش به دست آرید.

تحکیم درس: (7) دقیقه

برای این که شاگردان مفهوم درس جدید را بهتر فرا گیرند مثال 3 صفحهٔ 76 کتاب درسی را روی تخته بنویسید و آن را حل نمایید طوری که در حل مثال، شاگردان نیز سهم فعال داشته باشند.

ارزیابی ختم درس: (5) دقیقه

برای این که مطمئن شوید آیا شاگردان درس جدید را فرا گرفته اند یا خیر؟ ارزیابی کنید، برای این کار از شاگردان بپرسید:

- کی متیواند مشتق دوم ضمنی رابطهٔ $x^3 = y^3 + 1$ را به دست آرد؟

جواب به سؤال های تمرین

3. از رابطهٔ $x^2 + y^2 = 4x + 4y$ مشتق ضمنی بگیرید.

حل

$$x^2 + y^2 = 4x + 4y$$
$$x^2 + y^2 - 4x - 4y = 0$$
$$f'_{(x)} = 2x - 4$$
$$f'_{(y)} = 2y - 4$$
$$y'_{(x)} = -\frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}} = -\frac{2x-4}{2y-4} = \frac{4-2x}{2y-4} = \frac{2(2-x)}{2(y-2)} = \frac{2-x}{y-2}$$

$$f(x) = \sin x$$
$$f(x) = \cos x$$

فصل دوم

عنوان درس: مشتقات مرتبه بُلند

صفحهٔ کتاب(77)

وقت تدریس: یک ساعت درسی

اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	• شاگردان مفهوم مشتقات مرتبهٔ بلند را بفهمند. • شاگردان مشتقات مرتبهٔ بلند را دریافت کرده بتوانند. • شاگردان از دریافت مشتقات مرتبهٔ بلند احساس خوشی نمایند.
روش های تدریس	سؤال و جواب، کار گروهی و انفرادی
مواد ممد درسی	چارت شکل ورودی... .
توضیح ورودی (5) دقیقه	زمانی که به صنف داخل شدید کارهای مقدماتی تدریس را که اجرای آن برای هر معلم ضروری است انجام دهید. بعد طور زیر به توضیح ورودی بپردازید: چارتی را که از قبل آماده نموده اید پیش‌روی صنف آویزان کنید بعد بگویید شما در چارت دو تابع را می بینید، حال از تابع اول سه مرتبه و از تابع دوم پنج مرتبه مشتق بگیرید. اگر شاگردان به مفهوم آن پی نبردند به آنها بگویید؛ طور مثال: زمانی که می‌گوییم از تابع f اول سه مرتبه مشتق بگیرید به این معنی است که ابتدا مشتق اول تابع (f') را اخذ می‌نماییم بعد از مشتق اول تابع، مشتق می گیریم. مشتق دوم (f'') به دست می‌آید حال اگر از مشتق دوم دوباره مشتق گرفته شود مشتق سوم تابع که عبارت از $f'''(x)$ است به دست می آید.

فعالیت جریان درس: (28) دقیقه

شاگردان را به گروه های مناسب تقسیم نمایید بعد به آنها وظیفه دهید تا فعالیت صفحهٔ 77 کتاب درسی را انجام دهند. در جریان فعالیت از گروه‌ها نظارت نمایید تا تمام شاگردان در کار گروهی سهم فعال داشته باشند واگر شاگردان در اجرای فعالیت به مشکلی مواجه می‌شوند آنها را رهنمایی کنید.

در ختم کار گروهی نتیجه‌یی که از آن به دست آمده است به شاگردان بیان کنید، حال مثال 1 صفحهٔ 77 کتاب درسی را روی تخته بنویسید و از یک شاگرد داوطلب بخواهید تا آن را روی تخته حل کند.

اکنون مثال 2 صفحهٔ 77 کتاب درسی را روی تخته بنویسید و آن را حل کنید، طوری که شاگردان نیز سهم فعال داشته باشند.

مثال 3 صفحهٔ 78 کتاب درسی را روی تخته بنویسید و از یک شاگرد داوطلب بخواهید تا آن را حل کند. همزمان از سایر شاگردان بخواهید تا هر یک مثال مذکور را به شکل انفرادی در کتابچه‌های شان حل نمایند، اگر در حل سؤال روی تخته مشکلی وجود داشت از یک شاگرد دیگر بخواهید تا آن را اصلاح نماید، زمانی که مطمئن شدید حل سؤال روی تخته درست است از سایر شاگردان بخواهید تا سؤال حل شدهٔ کتابچه‌های شان را با سؤال حل شدهٔ روی تخته مقایسه کنند. تا اگر اشتباهی داشته باشند آن را اصلاح نمایند.

تحکیم درس: (7) دقیقه

برای این که شاگردان درس جدید را خوبتر فراگیرند مثال 4 صفحهٔ 78 کتاب درسی را روی تخته حل نمایید؛ طوری که شاگردان نیز سهم فعال داشته باشند؛ همچنان یادداشت همین صفحه را نیز به شاگردان توضیح نمایید و مانند کتاب عمل نمایید.

ارزیابی ختم درس: (5) دقیقه

برای این که مطمئن شوید آیا شاگردان درس جدید را فرا گرفته اند یا خیر؟ ارزیابی نمایید، برای این کار سؤال 1 تمرین صفحهٔ 78 کتاب درسی را روی تخته بنویسید و از یک شاگرد بخواهید تا روی تخته مشتق تابع متذکره را تا زمانی اخذ نماید که مشتق آن صفر گردد.

جواب به سؤال های تمرین

توابع زیر را تا وقتی مشتق بگیرید که مشتق آن‌ها صفر گردد:

1) $y = 4x^4 - 3x^3 - 2x$ 2) $y = (5x-2)^3$

3) $y = a + b + c^2 - x - ax - bx - cx^3 - c^3x$ 4) $y = \sin x$

حل 1):

$y' = 16x^3 - 9x^2 - 2$

$y'' = 48x^2 - 18x$

$y''' = 96x - 18$

$y^{(4)} = 96$

$y^{(5)} = 0$

حل 2):

$y' = 3(5x-2)^2 \cdot 5 = 15(5x-2)^2$

$y'' = 15[2(5x-2)\cdot 5] = 15[10(5x-2)] = 150(5x-2)$

$y''' = (150)'(5x-2) + 150(5x-2)' = 0\cdot(5x-2) + 150(5) = 150\cdot 5 = 750$

$y^{(4)} = 0$

حل 3):

$y' = 0 + 0 + 0 - 1 - a - b - 3cx^2 - c^3$

$y'' = -6cx$

$y''' = -6c$

$y^{(4)} = 0$

حل 4):

$y' = \cos x$

$y'' = -\sin x$

$y''' = -\cos x$

$y^{(4)} = -(-\sin x) = \sin x$

$y^{(5)} = \cos x$

$y^{(6)} - \sin x$

$\vdots$

$y^n = \sin x$

فصل دوم

عنوان درس: نکات مهم فصل دوم

صفحهٔ کتاب(79)

وقت تدریس: یک ساعت درسی

اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	• شاگردان نکات مهم این فصل را بدانند. • شاگردان نکات مهم این فصل را بیان کرده بتوانند. • شاگردان از بیان توضیح نکات مهم این فصل احساس خوشی نمایند.
روش های تدریس	سؤال و جواب
مواد ممد درسی	چارتی که در آن نکات مهم این فصل تحریر شده باشد.
توضیح ورودی (5) دقیقه	بعد از این که داخل صنف شدید کارهای مقدماتی تدریس را که اجرای آن برای هر معلم ضروری است انجام دهید. بعد چارتی را که از قبل آماده نموده اید پیش‌روی صنف آویزان کنید؛ سپس وارد درس جدید شوید.

فعالیت جریان درس: (28) دقیقه

هر یک از نکات مهم فصل را با استفاده از چارت تهیه شده از شاگردان بپرسید؛ طوری که از هر شاگرد صرف در مورد یکی از نکات مهم فصل سؤال کنید و بعد از آنها جواب درست را مطالبه کنید؛ اگر شاگرد اولی موفق به ارائهٔ جواب درست نشد و طوری که لازم است توضیح کرده نتوانست از شاگرد دیگری سؤال کنید و این کار را تا زمانی ادامه دهید تا تمام نکات مهم فصل یکی بعد دیگر توسط شاگردان بیان و توضیح شود.

حال قوانین مشتق، مشتق توابع مرکب و مشتق توابع مثلثاتی صفحهٔ 80 کتاب درسی را به شاگردان بیان کنید طوری که شاگردان نیز سهم فعال داشته باشند؛ به این معنی در هر قسمت از شاگردان سؤال نموده و جواب‌های قناعت بخش به دست آرید.

تحکیم درس: (7) دقیقه

برای این که شاگردان مفهوم درس جدید را بهتر بفهمند بعضی از نکات مهم فصل را که از نظر شما درک آن برای شاگردان یک اندازه مشکل است به صورت تکرار به شاگردان بیان کنید.

ارزیابی ختم درس: (5) دقیقه

برای این که مطمئن شوید آیا شاگردان درس جدید را فرا گرفته اند یا خیر؟ ارزیابی کنید؛ طور مثال: از شاگردان بپرسید:

- کی میتواند مفهوم مشتق را از نگاه هندسی تعبیر کند؟

- کی متیواند بگوید که مشتق یک حاصل تقسیم مساوی به چیست؟

جواب به سؤال های تمرین

به سوال‌های زیر چهار جواب داده شده است ، جواب صحیح را انتخاب کنید:

1- میل خط مماس با منحنی تابع $f(x)=x^2-x$ در نقطهٔ $P(3,0)$ عبارت است از:

حل: $c)\ 5$

2- تغییر متوسط تابع $f(x)=2x^2$ در انتروال $[3\ ,\ 4]$ عبارت است از:

حل : $b)\ 14$

3- مشتق تابع $y=2x^2-3x^{-1}$ عبارت است از:

حل : $c)\ \ y'=4x+\dfrac{3}{x^2}$

4 – مشتق تابع $f(x)=\sqrt{x-1}$ عبارت است از:

حل : $b)\ \dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}$

5 – معادلهٔ خط مماس یا خط منحنی تابع $f(x)=2x^2+x$ در نقطهٔ $x=1$ عبارت است از:

حل : $a)\ \ f(x)=5x-2$

6- مشتق تابع $y=\dfrac{2x}{(-x+4)^2}$ عبارت است از:

حل : $d)\ \ y'=-\dfrac{8}{(-x+4)^2}$

7 – مشتق تابع $y=(2-x^2)^3$ عبارت است از:

حل: هیچکدام $d)$

8 – مشتق تابع $y=\sin x$ عبارت است از:

حل : $b)\ \ y'=\cos x$

9 – مشتق تابع $y=(1+x^4)^{\frac{-1}{5}}$ عبارت است از:

حل:هیچکدام $d)$

10 – مشتق تابع $y=\dfrac{\cos x}{1-\cos x}$ عبارت است از:

حل : $c)\ \ y'=\dfrac{-\sin x}{(1-\cos x)^2}$

سؤالات ذیل را به تفصیل حل کنید:

1- مشتق تابع $f(x) = \dfrac{2\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$ را دریابید.

حل: نخست تابع را ساده می‌سازیم بعد مشتق می گیریم:

$$\tan^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}$$

$$(1+\tan^2 x) = \frac{1}{\cos^2 x}$$

حال قیمت‌ها را در تابع وضع می کنیم:

$$f(x) = \frac{2\tan^2 x}{1+\tan^2 x} = \frac{\frac{2\sin^2 x}{\cos^2 x}}{\frac{1}{\cos^2 x}} = \frac{2\sin^2 x}{\cos^2 x}\cdot\frac{\cos^2 x}{1} = \frac{2\sin^2 x\cdot\cos^2 x}{\cos^2 x} = 2\sin^2 x \Rightarrow f(x) = 2\sin^2 x$$

$$f'(x) = 2\cdot 2\sin x\cdot\cos x = 2\sin 2x$$

2- مشتق تابع $f(x) = \dfrac{x+\sqrt{x-x^2}}{\sqrt{x}+\sqrt{1-x}}$ را دریابید.

حل: اگر از صورت کسر تابع، $\sqrt{x}$ را مشترک بگیریم تابع ساده می‌شود طور زیر:

$$f(x) = \frac{x+\sqrt{x-x^2}}{\sqrt{x}+\sqrt{1-x}} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt{1-x})}{(\sqrt{x}+\sqrt{1-x})} = \sqrt{x}$$

$$f(x) = \sqrt{x}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

3- مشتق تابع $f(x) = (x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)$ را دریابید.

حل: با ضرب قوس‌ها می‌توان تابع را ساده کرد:

$$f(x) = (x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)$$

$$f(x) = (x^2-1)(x^2+1)(x^4+1)$$

$$f(x) = (x^4-1)(x^4+1) = x^8+x^4-x^4-1$$

$$f(x) = x^8-1$$

$$f'(x) = 8x^7$$

4- مشتق تابع $f(x) = (\sqrt[3]{x}-1)(\sqrt[3]{x}+4)$ را دریابید.

حل:

$$f'(x) = (\sqrt[3]{x}-1)'(\sqrt[3]{x}+4) + (\sqrt[3]{x}-1)(\sqrt[3]{x}+4)'$$

اگر $y = \sqrt[n]{u}$ باشد؛ پس $y' = \dfrac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$ است، حال برای $y = \sqrt[3]{x}$ داریم که: $(\sqrt[3]{x})x = y' = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^{3-1}}} = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

$$f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}(\sqrt[3]{x}+4) + (\sqrt[3]{x}-1)\cdot\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} = \frac{\sqrt[3]{x}+4}{3\sqrt[3]{x^2}} + \frac{\sqrt[3]{x}-1}{3\sqrt[3]{x^2}} = \frac{\sqrt[3]{x}+4+\sqrt[3]{x}-1}{3\sqrt[3]{x^2}} = \frac{2\sqrt[3]{x}+3}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

5- مشتق تابع $f(x)=\sin x\cdot\cos x$ را در نقطهٔ $\frac{\pi}{4}$ دریابید.

حل: ابتدا تابع را ساده می‌سازیم بعد مشتق می گیریم:

$$f(x)=\sin x\cdot\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x.$$

$$f(x)=\frac{1}{2}\sin 2x$$

$$f'(x)=\frac{1}{2}\cdot 2\cos 2x=\cos 2x$$

پس برای $x=\frac{\pi}{4}$ داریم که:

$$f'(x)=f'(\frac{\pi}{4})=\cos 2(\frac{\pi}{4})=\cos(\frac{\pi}{2})=\cos(90^\circ)=0$$

6- مشتق تابع $f(x)=\frac{(\sin x+\cos x)^2}{1+\sin 2x}$ را دریابید.

حل: اول تابع را ساده می‌سازیم بعد مشتق می گیریم:

$$(\sin x+\cos x)^2=\sin^2 x+2\sin x\cdot\cos x+\cos^2 x=\underbrace{\sin^2 x+\cos^2 x}_{1}+2\sin x\cdot\cos x$$

$$=1+2\sin x\cdot\cos x=1+\sin 2x$$

$$f(x)=\frac{1+\sin 2x}{1+\sin 2x}=1$$

$$f(x)=1\ \Rightarrow\ f'(x)=0$$

7- مشتق مرتبه هشتم $y=\cos x$ را دریابید.

حل:

$$y=\cos x$$

$$y'=-\sin x$$

$$y''=-\cos x$$

$$y'''=-(-\sin x)=\sin x$$

$$y^{(4)}=\cos x$$

$$y^{(5)}=-\sin x$$

$$y^{(6)}=-\cos x$$

$$y^{(7)}=-(-\sin x)=\sin x$$

$$y^{(8)}=\cos x$$

8- مشتق مرتبه نهم $y=\sin^2 x+\cos^2 x$ را دریابید.

حل:

$$y'=(\sin^2 x)'+(\cos^2 x)'=2\sin x\cdot\cos x+(-2\cos x\cdot\sin x)=2\sin x\cdot\cos x-2\cos x\cdot\sin x=0$$

یا به طریقهٔ دیگر:

$$y=\sin^2 x+\cos^2 x \quad\Rightarrow\quad y=1$$
$$y^{(8)}=0$$

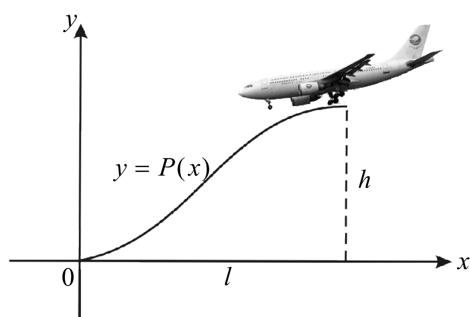
مشتق مرتبهٔ نهم تابع $y=\sin^2 x+\cos^2 x$ نیز صفر است؛ زیرا:

$$\sin^2 x+\cos^2 x=1$$
$$y=1 \quad\Rightarrow\quad y^{(9)}=0$$

9- مشتق ضمنی تابع $x^2+xy+y^2=3$ را دریابید.

حل:

$$x^2+xy+y^2-3=0$$
$$f'_{(x)}=2x+y$$
$$f'_{(y)}=x+2y$$
$$y'_{(x)}=-\frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}}=-\frac{2x+y}{x+2y}=\frac{-2x-y}{x+2y}$$



فصل: سوم

عنوان درس: موارد استعمال مشتق

صفحهٔ کتاب (85)

وقت: یک ساعت درسی

اهداف آموزشی **- دانشی** **- مهارتی** **- ذهنیتی**	- شاگردان مفهوم کار برد و استعمال مشتق را بدانند. - شاگردان عملاً مشتق را به کار برده، سؤالات مربوط آنرا حل کرده بتوانند. - شاگردان از کار برد عملی مشتق در زنده‌گی روزمره احساس خوشی نمایند.
روش های تدریس	سؤال و جواب، کار گروهی و انفرادی...
مواد ممد درسی	چارت شکل ورودی و چارت های اشکال (1) و (2) فعالیت صفحهٔ 85
توضیح ورودی **(5) دقیقه**	بعد از انجام کار های مقدماتی تدریس که بعد از داخل شدن به صنف ضروری است به توضیح بخش ورودی بپردازید، ابتدا چارت شکل ورودی را که از قبل آماده نموده اید پیش روی صنف آویزان کنید، بعد به ترتیب نظریات یک تعداد شاگردان را مطابق ایجاب و قت در مورد ارتفاع شکل اخذ نمایید و هم در مورد کاربرد مشتق؛ مثلاً: کاربرد آن در موضوعات سرعت، تعجیل و حرکت و هم سایر مضامین بیان کنید. علاوه بر آن کاربرد مشتق را در قسمت تحولات تابع نیز توضیح دهید.

فعالیت جریان درس: (28) دقیقه

چارت های اشکال (1) و (2) مربوط فعالیت صفحهٔ(85) کتاب درسی را پیش روی صنف آویزان کنید. بعد شاگردان را به گروه های مناسب تقسیم نموده و به هر گروه وظیفه دهید تا با مشورت یکدیگر فعالیت صفحهٔ 85 کتاب درسی را انجام دهند. از گروه ها نظارت نمایید تا تمام شاگردان در فعالیت سهم داشته باشند و اگر مشکلی داشتند رهنمایی کنید. در ختم کار گروهی از نمایندهٔ یک گروه بخواهید تا فعالیتی را که انجام داده اند به دیگران توضیح دهند.

یادداشت: در مورد یادداشت صفحهٔ 86 باید گفت که تابع ثابت نه متزاید و نه متناقص است.

اکنون مثال (1) مربوط این درس را روی تخته بنویسید و آنرا طوری حل نمایید که شاگردان نیز سهم فعال داشته باشند.

مثال (2) مربوط این درس را روی تخته بنویسید و از یک شاگرد بخواهید تا آنرا روی تخته حل نماید. همزمان از شاگردان دیگر بخواهید تا مثال مذکور را به صورت ا نفرادی هر یک در کتابچه های خویش حل نمایند؛ اگر در حل مثال روی تخته اشتباهی وجود داشت از یک شاگرد داوطلب بخواهید تا آنرا اصلاح نماید زمانیکه مطمئن شدید که حل مثال کاملاً درست است از سایر شاگردان بخواهید تا حل شان را با مثال حل شدهٔ روی تخته مقاسیه نمایند.

تحکیم درس (7) دقیقه

برای اینکه شاگردان موضوع درس جدید را خوب بفهمند مثال (3) و (4) صفحهٔ 87 کتاب درسی را روی تخته بنویسید و به ترتیب به حل هر یک طوری بپردازید که شاگردان نیز سهیم باشند.

ارزیابی ختم درس (5) دقیقه

برای اینکه مطمئن شوید آیا شاگردان درس جدید را فرا گرفته اند یا خیر؟ ارزیابی کنید و از شاگردان بپرسید.

- کی میتواند بگوید که کاربرد مشتق در علم ریاضی چیست؟
- کی میتواند بگوید در مورد توابع از قوانین مشتق چه استفاده شده می تواند؟

معلومات اضافی

در ساختمان تعمیرات، وسایل تخنیکی، مسایل طبی وسایر عرصه ها باید متخصصان بدانند تا چه عوامل وقوه های داخلی و خارجی، وسایل، ساختمان ها را متأثر می‌سازد، یعنی تحلیل نقاط اعظمی واصغری مقاومت مواد ساختمانی و سایل تخنیکی، فشار وارده بر اورگانیزم، قدرت اعظمی کنترول دستگاه‌ها، موجودیت انرژی، حد اعظمی تولیدات، حد اقل تلفات، نواقص و مؤثریت و استفادهٔ اعظمی عناصر و مواد مورد ضرورت یک امر حتمی و ضروری می باشد، که بدون در نظر داشت آنها کار آنها ناقص و بی ثمر خواهد بود.

بنا بر این استعمال مشتق و به کار برد آن در جهان امروزی جهت نیل به اهداف علمی خیلی ها با ارزش می باشد.

جواب به سؤال های تمرین

1- تحولات تابع $y = ax + b$ را نشان دهید.

حل: ابتدا ساحهٔ تعریف تابع مذکور را دریافته بعد شرط تزاید آنرا بررسی می‌کنیم:

$$D_f \longrightarrow IR$$
$$y = ax + b$$
$$y' = a > 0$$

چون $y' > 0$ است؛ پس تابع برای تمام قیمت‌های x متزاید است.

2- تحولات تابع $y = \frac{-3}{4}x - 1$ را نشان دهید.

و برای $a < 0$, $y' < 0$ می‌باشد؛ پس تابع برای $a < 0$ متناقص است.

حل دوم: نخست ساحهٔ تعریف تابع داده شده را دریافته بعد شرط تناقص آنرا مطالعه می‌نماییم:

$$D_f \longrightarrow IR$$
$$y = \frac{-3}{4}x - 1 \;\Rightarrow\; y' = \frac{-3}{4} < 0$$

چون $y' < 0$ است؛ بناءً تابع مذکور برای تمام قیمت‌های x متناقص می‌باشد.

3- نشان دهید که تابع $f(x) = 2x^2 + 3x + 1$ در نقطهٔ $x = 1$ متزاید است.

نوت: چون تزاید تابع عموماً در یک انتروال مطالعه می گردد نه در یک نقطه، بناءً در طرح سؤال کتاب به عوض نقطه، انتروال مطلوب است.

حل: چون تمام قیمت‌های اعداد حقیقی ساحهٔ تعریف تابع $f(x)=2x^2+3x+1$ می‌باشد؛ پس مشتق تـابع مـذکور را مورد مطالعه قرار می‌دهیم:

$$f(x)=2x^2+3x+1$$
$$f'(x)=4x+3$$
$$f'(x)=0$$
$$4x+3=0$$
$$4x=-3 \quad \Rightarrow \quad x=-\frac{3}{4}$$

حال قیمت به دست آمده را در تابع اولی وضع میکنیم:

$$f(x)=2x^2+3x+1$$

$$f(-\frac{3}{4})=2(-\frac{3}{4})^2+3(-\frac{3}{4})+1$$
$$=2(\frac{9}{16})+3(-\frac{3}{4})+1=\frac{9}{8}-\frac{9}{4}+1=\frac{9}{8}-\frac{5}{4}$$
$$=\frac{9-10}{8}=-\frac{1}{8}$$

x	$x<0.75$ $-\infty$	$x=0.75$ $-\frac{3}{4}=0.75$	$x>0.75$ $+\infty$
$f'(x)=4x+3$	$-$	0	$+$
$f(x)$	متناقص ↘	$-\frac{1}{8}$	↗ متزاید

دیده می‌شود که تابع در انتروال باز $(-\frac{3}{4},+\infty)$ متزاید است؛ پس مشتق آن در این انتروال مثبت می‌باشد.

4- انتروال تزاید تابع $y=x^2+3x+2$ را تعیین کنید.

حل: برای دریافت انتروال تزاید تابع از تابع $f(x)$ مشتق گرفته و مشتق آنرا مساوی به صفر قرار می‌دهیم طور ذیل:

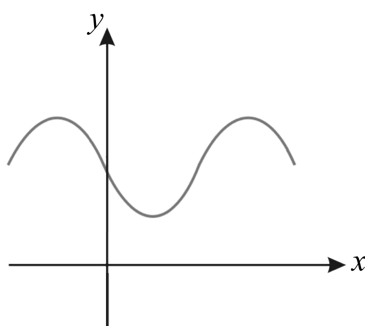
$$y=x^2+3x+2$$
$$y'=2x+3$$
$$y'=0$$
$$2x+3=0 \quad \Rightarrow \quad 2x=-3 \;, \quad \boxed{x=-\frac{3}{2}}$$

حال قیمت x را در تابع $y=x^2+3x+2$ وضع می‌کنیم:

$$y_{(-\frac{3}{2})}=(-\frac{3}{2})^2+3(-\frac{3}{2})+2$$
$$=\frac{9}{4}-\frac{9}{2}+2=\frac{9}{4}-\frac{9+4}{2}$$
$$=\frac{9}{4}-\frac{5}{2}=\frac{18-20}{8}=\frac{-2}{8}=-\frac{1}{4}$$

x	$x<-1.5$ $-\infty$	$x=1.5$ $-\frac{3}{2}=-1.5$	$x>1.5$ $+\infty$
$y'=2x+3$	$-$	0	$+$
y	متناقص ↘	$-\frac{1}{4}$	↗ متزاید

از جدول به مشاهده می‌رسد که مشتق تابع در انتروال $(-\frac{3}{2},\infty)$ مثبت است؛ پس تابع در همین انتروال $-\frac{3}{2}<x<\infty$ متزاید است.



فصل: سوم

عنوان درس: نقاط بحرانی یک تابع(اعظمی و اصغری)

صفحهٔ کتاب(89)

وقت:(2 ساعت درسی) ساعت اول درسی

اهداف آموزشی **– دانشی** **– مهارتی** **– ذهنیتی**	– شاگردان مفهوم نقاط بحرانی یک تابع را بدانند. – شاگردان نقاط اعظمی واصغری یک تابع را دریافت کرده بتوانند. – شاگردان از حل سؤال های مربوط به دریافت نقاط بحرانی احساس خوشی نمایند.
روشهای تدریس	سؤال و جواب، کار گروهی و انفرادی...
مواد ممد درسی	چارت شکل ورودی، چارت شکل مربوط فعالیت صفحه(89) و چارت اشکال (1)و (2)صفحه (90)
توضیح ورودی **(5) دقیقه**	بعد از انجام کار های مقدماتی تدریس که بعد از داخل شدن به صنف ضروری است به توضیح بخش ورودی طور ذیل بپردازید: چارت مربوطه را که از قبل آماده نموده اید آنرا پیش روی صنف آویزان کنید.بعداً از شاگردان بخواهید تا به شکل، دقت کنند و از آنها بپرسید: – شکل منحنی چگونه است؟ – بلندترین وپایین‌ترین نقاط در منحنی کدام ها اند؟ – این نقاط به نام چی یاد می شوند؟

فعالیت جریان درس (28) دقیقه

چارت شکل مربوط به فعالیت صفحهٔ (89) کتاب درسی را که از قبل تهیه نموده ایدپیش روی صنف آویزان کنید. بعد شاگردان را به گروه های مناسب تقسیم نمایید و به هر گروه وظیفه دهید تا فعالیت صفحه(89) کتاب درسی را با مشورهٔ یکدیگر انجام دهند. در جریان فعالیت از گروه ها نظارت کنید تا تمام شاگردان در فعالیت سهم داشته باشند و اگر مشکلی داشتند آنها را رهنمایی کنید. در ختم کار گروهی از نمایندهٔ یک گروه بخواهید تا فعالیتی را که انجام داده اند به دیگران توضیح دهد.

چارت اشکال (1) و (2) صفحهٔ (90) کتاب درسی را که از قبل تهیه نموده اید پیش روی صنف آویزان کنید. بعد به ترتیب توابع ثابت، متزاید و متناقص را طوری تعریف کنید که شاگردان نیز سهم فعال داشته باشند.

به همین ترتیب نقاط اعظمی، اصغری و نقطهٔ انعطاف را در حالیکه شاگردان نیز سهم داشته باشند تعریف نمایید تا آنها مفهوم نقاط متذکره را دانسته و آنها را بشناسند.

حال مثال (1) صفحهٔ (91) کتاب درسی را روی تخته بنویسید و آنرا طوری حل کنید که شاگردان نیز سهیم باشند.

تحکیم درس: (7) دقیقه

برای اینکه شاگردان موضوع درس جدید را خوب درک نمایند مثال (2) صفحهٔ (91) کتاب درسی را روی تخته بنویسید و از یک شاگرد بخواهید تا آنرا روی تخته حل نماید. همزمان از شاگردان دیگر بخواهید تا مثال مذکور را هر یک در کتابچه های شان حل نمایند؛ اگر در حل سؤال روی تخته اشتباهی موجود باشد از یک شاگرد داوطلب بخواهید تا آنرا اصلاح نماید، زمانیکه مطمئن شدید که حل سؤال روی تخته کاملاً درست است از سایر شاگردان بخواهید تا سؤال حل شدهٔ کتابچه‌های شان را با سؤال حل شدهٔ روی تخته مقاسیه نمایند.

ارزیابی ختم درس (5) دقیقه

برای اینکه مطمئن شوید آیا شاگردان موضوعات درس جدید را فرا گرفته اند یا خیر؟ از آنها بپرسید:

- کی میتواند تابع ثابت، تابع متزاید و تابع متناقص را تعریف و در شکل نشان دهد؟
- کی میتواند نقاط اعظمی، اصغری و نقطهٔ انعطاف را تعریف و در شکل نشان دهد.

معلومات اضافی

نقطهٔ $(x_0, f(x_0))$ از تابع F در صورت نقطهٔ بحرانی می‌باشد که یکی از حالات زیر صدق می کند:

$$1)\ f'(x_0)=0 \qquad , \qquad 2)\ f'(x_0)$$

اعظمی و اصغری در علوم طبیعی و ریاضی برای دریافت بزرگترین و کوچکترین قیمت های توابع در نواحی معینهٔ مسأله مهم و قابل تطبیق به کار میرود.

تعیین خطوط جیودیزی، محاسبات و اریاسیون مسایل بهینه سازی(نامگذاری)، صنعت و غیره توسط مفاهیم اعظمی و اصغری مطرح می شوند.

جواب به سؤال های تمرین

1. Etreme (نقاط بحرانی) توابع ذیل را دریابید:

$$a)\ f(x)=x^2-3x+2 \qquad b)\ f(x)=\frac{x+1}{x^2} \qquad c)\ y=3x^2-4x+1$$

حل a): از تابع داده شده نخست مشتق گرفته بعد مشتق آنرا مساوی به صفر قرار می‌دهیم؛ سپس جهت علامهٔ آنرا تعیین می‌نماییم:

$$f(x)=x^2-3x+2$$
$$f'(x)=2x-3$$
$$f'(x)=0$$
$$2x-3=0 \ \Rightarrow\ 2x=3\ ,\quad \boxed{x=\frac{3}{2}}$$

حال قیمت به دست آمده را درتابع اولی وضع می‌نماییم:

$$f(x)=x^2-3x+2$$
$$f(\frac{3}{2})=(\frac{3}{2})^2-3(\frac{3}{2})+2$$
$$=\frac{9}{4}-\frac{9}{2}+2=\frac{9}{4}-\frac{9+4}{2}=\frac{9}{4}-\frac{5}{2}$$
$$=\frac{18-20}{8}=\frac{-2}{8}=\frac{-1}{4}$$

x	$x<-1.5$ $-\infty$	$x=1.5$ $\frac{3}{2}=1.5$	$x>1.5$ $+\infty$
$f'(x)=2x-3$	$-$	0	$+$
y	↘	$-\frac{1}{4}$ min	↗

از جدول فوق مشاهده می گردد که تابع دارای یک نقطهٔ اصغری است.

حل b)**:** نقاط تقاطع با محور y: $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\infty$ و یا $y=\infty$, $x=0$

محور y را قطع نمی‌کند و محور y مجانب عمودی تابع $f(x)$ می‌باشد.

نقاط تقاطع با محور x: $x=-1$ $\Rightarrow$ $x+1=0$, $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2}$

$(-1,0)$ نقطهٔ تقاطع با محور x می‌باشد.

$$f'(x)=\frac{(x+1)'x^2-(x^2)'(x+1)}{(x^2)^2}=\frac{x^2-2x^2-2x}{x^4}=\frac{-x^2-2x}{x^4}=\frac{x(-x-2)}{x^4}=\frac{-x-2}{x^3}$$

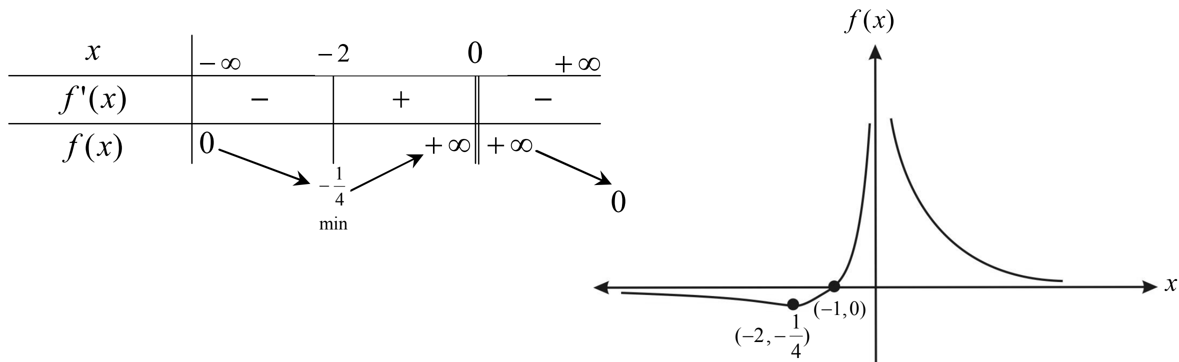
$$\frac{-x-2}{x^3}=0\ ,\ \ -x-2=0\ \Rightarrow\ -x=2\ \Rightarrow\ \boxed{x=-2}$$

$$f''(x)=\frac{-1(x^3)-3x^2(-x-2)}{\left[(x^3)\right]^2}=\frac{-x^3+3x^3+6x^2}{x^6}=\frac{2x^3+6x^2}{x^6}=\frac{x^2(2x+6)}{x^6}=\frac{2x+6}{x^4}$$

$$f''(-2)=\frac{-4+6}{2^4}=\frac{2}{16}=\frac{1}{8}>0$$

$$f(-2)=\frac{-1}{4}$$

$(-2,-\frac{1}{4})$ نقطهٔ اصغری تابع می‌باشد.



x	$-\infty$	-2		0		$+\infty$
$f'(x)$	$-$		$+$	‖	$-$	
$f(x)$	0 ↘	$-\frac{1}{4}$ min	↗ $+\infty$	‖	$+\infty$ ↘	0

حل c)**:** ابتدا از تابع، مشتق گرفته بعد علامهٔ آنرا تعیین می کنیم:

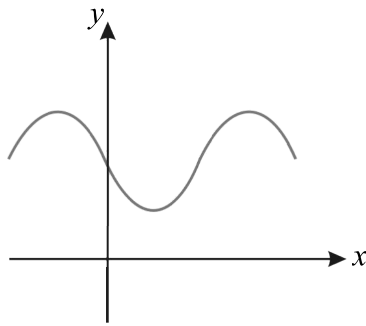
$$y=3x^2-4x+1$$
$$y'=6x-4$$
$$y'=0$$
$$6x-4=0\ \Rightarrow\ 6x=4\ \ ,\ \ x=\frac{4}{6}\ \ ,\ \ \boxed{x=\frac{2}{3}}$$

قیمت x را در تابع $y=3x^2-4x+1$ وضع می‌نماییم:

$$y_{(\frac{2}{3})}=3(\frac{2}{3})^2-4(\frac{2}{3})+1$$
$$=3(\frac{4}{9})-\frac{8}{3}+1=\frac{12}{9}-\frac{8}{3}+1=\frac{12}{9}-\frac{8-3}{3}$$
$$=\frac{12}{9}-\frac{5}{3}=\frac{12-15}{9}=\frac{-3}{9}=-\frac{1}{3}$$

x	$-\infty$	$\frac{2}{3}=0.\overline{6}$	$+\infty$
$y'=6x-4$	$-$	0	$+$
y	↘	$-\frac{1}{3}$ min	↗

از جدول فوق دیده می‌شود که تابع دارای یک نقطهٔ اصغری است.



فصل سوم

عنوان درس: نقاط اعظمی و اصغری مطلق

صفحهٔ کتاب(92)

وقت: ساعت دوم درسی

اهداف آموزشی **- دانشی** **- مهارتی** **- ذهنیتی**	- شاگردان مفهوم نقاط اعظمی و اصغری مطلق را بدانند. - شاگردان نقاط اعظمی و اصغری مطلق را دریافت کرده بتوانند. - شاگردان از دریافت نقاط اعظمی و اصغری مطلق احساس خوشی نموده و آنرا در حیات روز مره به کار ببرند.
روش های تدریس	سؤال وجواب،کار گروهی و انفرادی...
مواد ممد درسی	چارت شکل ورودی، چارت فعالیت صفحهٔ (92) کتاب درسی.
توضیح ورودی **(5) دقیقه**	بعد از انجام کار های مقدماتی که بعد از داخل شدن به صنف ضروری است یکبار دیگر به توضیح بخش ورودی بپردازید: چارت شکل ورودی را پیش روی صنف آویزان نموده و در منحنی تابع، بلند ترین و پایین ترین نقاط را نشان داده و از شاگردان بخواهید تا بگویند که این نقاط به نام چه یاد می شوند؟ سعی کنید تا از آنها جواب های قناعت بخش به دست آرید.

فعالیت جریان درس: (28) دقیقه

چارت فعالیت صفحهٔ (92) کتاب درسی را که از قبل آماده نموده اید پیش روی صنف آویزان کنید. بعد شاگردان را به گروه های مناسب تقسیم نموده به آنها وظیفه دهید تا با مشورهٔ یکدیگر فعالیت صفحهٔ (92) کتاب را انجام دهند. در جریان کارگروهی از گروهها نظارت نمایید تا تمام شاگردان در فعالیت سهم بگیرند و اگر مشکلی داشتند آنها را رهنمایی کنید. در ختم فعالیت از نماینده یک گروه بخواهید تا فعالیتی را که انجام داده اند به دیگران توضیح، دهد اگر در کار گروهی مشکلی موجود به اصلاح آن بپردازید. نقاط اعظمی مطلق و اصغری مطلق را که در صفحات (92) و (93) کتاب درسی موجود است تعریف نموده و در شکل نشان دهید که شاگردان نیز سهم فعال داشته باشند.

اکنون مثال (1) صفحهٔ (93) کتاب درسی را روی تخته بنویسید و آنرا طوری حل کنید که شاگردان فعالانه سهم داشته باشند.

مثال (2) صفحهٔ (94) کتاب درسی را روی تخته بنویسید و از یک شاگردان داوطلب بخواهید تا آنرا حل کند. همزمان از شاگردان دیگر بخواهید تا هر یک مثال مذکور را در کتابچه های شان حل نمایند. در ختم فعالیت زمانیکه مطمئن شدید که حل سؤال روی تخته کاملاً درست است از شاگردان دیگر بخواهید تا سؤال حل شدهٔ کتابچه‌های شان را با سؤال حل شدهٔ روی تخته مقایسه کنند.

تحکیم درس: (7) دقیقه

برای اینکه شاگردان درس جدید را بهتر بیاموزند ابتدا مراحل ترسیم گراف منحنی یک تابع را به ترتیب توضیح نموده؛ سپس مثال (3) صفحه(95) کتاب را روی تخته طوری حل نمایید تا شاگردان نیز سهم فعال داشته باشند.

ارزیابی ختم درس: (5) دقیقه

برای اینکه مطمئن شوید که آیا شاگردان درس جدید را فرا گرفته اند یا خیر؟ ارزیابی نمایید؛ مثلاًاز شاگردان بپرسید:

- کی میتواند نقاط اعظمی مطلق و اصغری مطلق را تعریف کرده و در شکل نشان دهد؟
- کی میتواند مراحل ترسیم یک منحنی را به ترتیب بیان کند؟

معلومات اضافی

ممکن است یک تابع در یک انتروال دارای چندین نقطهٔ اعظمی و اصغری موضعی(نسبی) باشد، ولی در انتروال معینه، تابع بیشتر از یک قیمت اعظمی(اعظمی مطلق) و یک قیمت اصغری(اصغری مطلق) نمی باشد. اگر قیمت های تابع $f(x)$ را در یک انتروال تحت مطالعه قرار دهیم، قیمت های $\max f(x)$ و $\min f(x)$ در یکی از حالات ذیل اتفاق می افتد:

1. در نقاطی که مشتق تابع صفر می شود.
2. در انجام انتروال ها.
3. در نقاطی که تابع در آنها مشتق پذیر نباشد.
4. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=+\infty$ و یا $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=-\infty$ پس در این صورت اعظمی و اصغری مطلق ندارد.

جواب به سؤال های تمرین

2- min مطلق تابع $f(x)=3x^3-4x^2$ را دریافت کنید؟

حل:

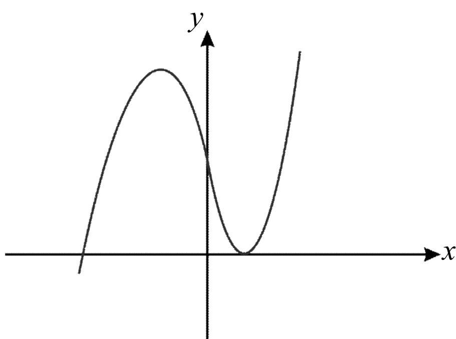
$$f'(x)=9x^2-8x$$
$$f'(x)=0$$
$$9x^2-8x=0$$
$$x(9x-8)=0$$
$$x_1=0$$
$$9x-8=0 \quad \Rightarrow \quad 9x=8$$
$$x_2=\frac{8}{9}=0.\overline{8}$$

حال قیمت را در مشتق تابع می گذاریم:

$$f'(x)=9x^2-8x$$
$$f'(0)=0$$
$$f'(\frac{8}{9})=9(\frac{8}{9})^2-8(\frac{8}{9})=9(\frac{64}{81})-\frac{64}{9}=\frac{576}{81}-\frac{64}{9}=\frac{576-576}{81}=0$$
$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}(3x^3-4x^2)=\lim_{x\to\infty}3x^3-\lim_{x\to\infty}4x^2=+\infty$$

x	$-\infty$	0		$\frac{8}{9}$	$+\infty$
$f'(x)=9x^2-8x$	$+$		$-$		$+$
$f(x)$	$\nearrow$	0	$\searrow$	0	$\nearrow$

توجه به جدول گفته می توانیم که در نقطهٔ $(\frac{8}{9},0)$ تابع اصغری مطلق دارد.



فصل سوم

عنوان درس: تعیین نقطهٔ انعطاف توسط مشتق تابع

صفحهٔ کتاب (97)

وقت: یک ساعت درسی

اهداف آموزشی **- دانشی** **- مهارتی** **- ذهنیتی**	- شاگردان مفهوم نقطهٔ انعطاف را بدانند. - شاگردان نقطهٔ انعطاف را مشخص و تعیین کرده بتوانند. - شاگردان از دریافت نقطهٔ انعطاف احساس خوشی نمایند.
روش های تدریس	سؤال وجواب، کار گروهی و انفرادی...
مواد ممد درسی	چارت شکل ورودی، چارت شکل فعالیت صفحهٔ (97) کتاب درسی.
توضیح ورودی **(5) دقیقه**	بعد از انجام کار های مقدماتی تدریس که بعد از داخل شدن به صنف ضروری است به توضیح بخش ورودی اقدام نمایید. برای این کار چارت شکل ورودی را که از قبل آماده نموده اید پیش روی صنف آویزان کنید و از شاگردان بپرسید. - کی میتواند در شکل، نقاطی که منحنی از محدبیت به مقعریت و برعکس آن تبدیل می‌شود نشان دهد. - کی میتواند بگوید که این نقاط به چی نام یاد می شوند؟ سعی کنید تا جواب های قناعت بخش از شاگردان به دست آرید.

فعالیت جریان درس: (28) دقیقه

چارت شکل فعالیت صفحهٔ (97) کتاب درسی را که از قبل آماده نموده اید پیش روی صنف آویزان کنید. بعد شاگردان را به گروه های مناسب تقسیم نموده و به هر گروه وظیفه دهید تا فعالیت صفحهٔ (97) کتاب درسی را با مشورهٔ یکدیگر انجام دهند. در جریان فعالیت از گروه ها نظارت نمایید تا تمام شاگردان در فعالیت سهم فعال داشته باشند و اگر مشکلی داشتند رهنمایی کنید. در ختم فعالیت از نمایندهٔ یک گروه بخواهید تا فعالیتی را که انجام داده اند به دیگران توضیح نمایند؛ اگر در جریان توضیح اشتباهی موجود باشد آنرا تصحیح نمایید.

سه نتیجه‌یی که از فعالیت بالا به دست می آید و در کتاب موجود است به شاگردان طوری بیان نمایید که شاگردان نیز سهیم باشند؛ همچنان تعریف نقطهٔ انعطاف که در صفحهٔ (98) کتاب موجود است به شاگردان بیان نمایید.

مثال 1 صفحه (98) کتاب درسی را روی تخته بنویسید و آنرا حل نمایید طوری که شاگردان نیز سهم داشته باشند.

اکنون مثال (2) صفحهٔ 99 کتاب درسی را روی تخته بنوسید و از یک شاگرد داوطلب بخواهید تا آنرا حل نماید. همزمان از شاگردان دیگر بخواهید تا مثال فوق را به شکل انفرادی در کتابچه‌های خویش حل نمایند. در پایان اگر به حل سؤال روی تخته اشتباهی وجود داشت از یک شاگرد بخواهید تا آنرا اصلاح نماید. زمانیکه مطمئن شدید که حل مثال روی تخته کاملاً درست است از سایر شاگردان بخواهید تا سؤال حل شدهٔ کتابچه‌های شان را با سؤال حل شدهٔ روی تخته مقاسیه نمایند.

تحکیم درس: (7) دقیقه

برای اینکه درس جدید را شاگردان بهتر فرا گیرند مثال (3) صفحهٔ (100) کتاب درسی را روی تخته بنویسید و بعد آنرا حل کنید طوریکه شاگردان نیز سهم فعال داشته باشند. در آخر حل مثال بگویید که در کدام نقاط، مشتق دوم صفر است و علامهٔ خود را تغییر میدهد. در این نقطه مماس ترسیم شده میتواند و این نقطه عبارت از نقطهٔ انعطاف است.

ارزیابی ختم درس: (5) دقیقه

برای اینکه مطمئن شوید آیا شاگردان درس جدید را فرا گرفته اند یا خیر؟ارزیابی نمایید؛ مثلاً بپرسید:

- کی میتواند بگوید منحنی یک تابع در یک انتروال چه وقت محدب گفته میشود؟
- کی میتواند شرط مقعریت منحنی یک تابع را بیان کند؟
- کی میتواند نقطهٔ انعطاف را تعریف نماید؟

جواب به سؤال های تمرین

1- محدبیت و مقعریت تابع $f(x)=x^2-4$ را تعیین کنید.

حل:

a. تقاطع با محور y:

$$\begin{cases} x=0 \\ y=0^2-4 \ \Rightarrow \ y=-4 \end{cases} \qquad (0,-4)$$

b. تقاطع با محور x:

$$y=0$$
$$x^2-4=0 \ \Rightarrow \ (x-2)(x+2)=0$$
$$x-2=0 \ \Rightarrow \ x_1=2$$
$$x+2=0 \ \Rightarrow \ x_2=-2 \qquad (2,0)\ ,\ (-2,0)$$

نقاط تقاطع گراف تابع با محور x عبارت از $(2,0)$ و $(-2,0)$ است.

برای ترتیب نمودن جدول از تابع داده شده، مشتق می گیریم:

$$f(x)=x^2-4 \ ,\quad f'(x)=2x$$
$$f'(x)=0 \quad ,\quad 2x=0 \ \Rightarrow \ x=0$$
$$f(x)=x^2-4$$
$$f(0)=0^2-4=-4$$

x	$-\infty$ -2	0	2	$+\infty$
$f'(x)=2x$	$-$	$-$	$+$	$+$
$f''(x)$	$\cup$ 0	$\cup$	$\cup$ 0	$\cup$

-4

نقطهٔ انعطاف

برای تعیین نمودن مقعریت و محدبیت تابع، مشتق دوم را به دست می‌آوریم: $f''(x)=2>0$

چون $y''>0$ است، در نتیجه گفته می‌توانیم که منحنی تابع $f(x)$ مقعر است.

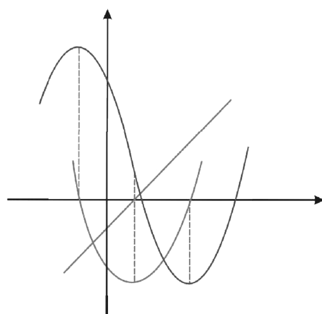
2- نقطهٔ انعطاف تابع $f(x)=-2x^2-1$ را تعیین کنید.

حل: برای تعیین نقطه انعطاف مشتق دوم تابع را به دست آورده و آنرا مساوی به صفر قرار می‌دهیم:

$$f(x)=-2x^2-1$$
$$f'(x)=-4x$$
$$f''(x)=-4$$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f''(x)=-4$	$-$	$-$	$-$
$f(x)$	جهت منحنی همیشه به طرف پایین		

طوریکه دیده می‌شود این تابع دارای نقطهٔ انعطاف نیست؛ چون $f''(x)=-4$ مساوی به صفر شده نمی‌تواند و یک عدد ثابت است و هم جهت منحنی به طرف منفی محور y است، از اینکه $f''(x)<0$ است؛ پس تابع همیشه محدب است.



فصل سوم

عنوان درس: ترسیم منحنی ها

صفحهٔ کتاب: (101)

وقت: یک ساعت درسی

اهداف آموزشی **- دانشی** **- مهارتی** **- ذهنیتی**	- شاگردان طریق ترسیم منحنی ها را یاد بگیرند. - شاگردان منحنی توابع مختلف را رسم کرده بتوانند. - شاگردان از ترسیم گراف توابع احساس خوشی نموده و آنرا در زنده گی روزمره به کار ببرند.
روش های تدریس	سؤال وجواب، کار گروهی و انفرادی...
مواد ممد درسی	چارت شکل ورودی
توضیح ورودی **(5) دقیقه**	بعد از انجام کارهای مقدماتی تدریس که بعد از داخل شدن به صنف ضرور است به توضیح بخش ورودی اقدام کنید: چارتی را که از قبل تهیه نموده اید پیش روی صنف آویزان نموده و از شاگردان سؤال کنید. - در شکل چند منحنی را مشاهده می کنید؟ - علاوه به منحنی ها دیگر چی می بینید؟ - بگویید مشاهدهٔ گراف تابع چی نوع تابع را نشان میدهد؟ جواب های قناعت بخش از شاگردان به دست آرید.

فعالیت جریان درس: (28) دقیقه

شاگردان را به گروه های مناسب تقسیم نموده و به هر گروه وظیفه دهید تا فعالیت صفحهٔ (101) کتاب درسی را با مشورهٔ یکدیگر انجام دهند. در جریان کار گروهی از گروه ها نظارت کنید تا تمام شاگردان در فعالیت سهم داشته باشند و اگر مشکلی داشتند آنها را رهنمایی کنید. در ختم کار گروهی از نمایندهٔ یک گروه بخواهید تا فعالیتی را که انجام داده اند به دیگران توضیح دهد، اگر هنگام توضیح مشکلات و یا اشتباهی موجود بود به رفع آن بپردازید.

سه نتیجهٔ که از انجام فعالیت بالا به دست می آید و در حقیقت مراحل ترسیم منحنی یک تابع را به ترتیب واضح می سازد، طوری توضیح دهید که شاگردان نیز سهم فعال داشته باشند.

مثال(1) صفحهٔ (103) کتاب درسی را روی تخته بنویسید و از یک شاگرد داوطلب بخواهید تا آنرا روی تخته حل نماید. همزمان از شاگردان دیگر بخواهید تا همان مثال را به شکل انفرادی در کتابچه های شان حل کنند. در پایان اگر در حل سؤال روی تخته اشتباهی موجود بود از یک شاگرد بخواهید تا آنرا اصلاح نماید. زمانیکه مطمئن شدید که حل سؤال روی تخته کاملاً درست است از سایر شاگردان بخواهید تا سؤال حل شدهٔ کتابچه‌های شان را با سؤال حل شدهٔ روی تخته مقایسه نمایند.

تحکیم درس: (7) دقیقه

برای اینکه شاگردان درس جدید را خوبتر فرا گیرند مثال(2) صفحهٔ(103) کتاب درسی را روی تخته بنویسید و آنرا حل کنید طوریکه شاگردان نیز سهم فعال داشته باشند.

ارزیابی ختم درس: (5) دقیقه

برای اینکه مطمئن شوید آیا شاگردان درس جدید را فرا گرفته اند یا خیر؟ارزیابی کنید؛ مثلاً:

از یک شاگرد بخواهید تا روی تخته سه مرحله‌یی که برای ترسیم گراف یک تابع ضرور است بیان نماید.

جواب به سؤال های تمرین

1- گراف تابع $f(x) = 2x^2 - x - 1$ را رسم کنید.

حل:

a. ناحیهٔ تعریف تابع $(-\infty,+\infty)$ است؛ پس تابع در همین انتروال متمادی است.

b. نقاط تقاطع منحنی تابع با محور y:

$$\left.\begin{array}{l} x=0 \\ y=2(0)^2-0-1 \\ y=-1 \end{array}\right\} (0,-1)$$

c. نقاط تقاطع منحنی تابع با محور x:

$$\left.\begin{array}{l} y=0 \\ 2x^2-x-1=0 \\ (2x+1)(x-1)=0 \\ 2x+1=0 \Rightarrow 2x=-1 \quad , \quad x_1=-\frac{1}{2} \\ x-1=0 \Rightarrow x_2=1 \end{array}\right\} (-\frac{1}{2},0)(1,0)$$

d. برای دریافت نقاط بحرانی تابع، نقاط صفری مشتق اول تابع را دریافته و جدول آنرا ترتیب می‌نماییم:

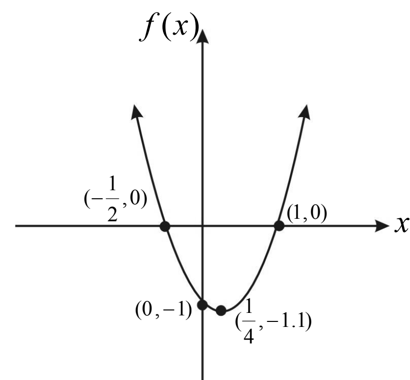
$$f(x)=2x^2-x-1$$
$$f'(x)=4x-1$$
$$f'(x)=0$$
$$4x-1=0 \Rightarrow 4x=1 \quad , \quad x=\frac{1}{4}$$

حال قیمت به دست آمده را در تابع می‌گذاریم:

$$f(\frac{1}{4})=2(\frac{1}{4})^2-\frac{1}{4}-1=2(\frac{1}{16})-\frac{1}{4}-1=\frac{1}{8}-\frac{1}{4}-1=\frac{1}{8}-\frac{1-4}{4}=\frac{1}{8}-\frac{5}{4}$$
$$=\frac{4-40}{32}=\frac{-36}{32}=-1.1250$$

$$\left.\begin{array}{l} x=\frac{1}{4} \\ f(\frac{1}{4})=-1.1250 \end{array}\right\} v(\frac{1}{4},-1.1250)$$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}=-0.5$		0		$\frac{1}{4}=0.25$		1		$+\infty$
$f'(x)=4x-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$		↘	0	↘	-1	↘	-1.1250 min	↗	0	↗	



2- تحولات تابع $f(x)=-x^2-x-2$ مطالعه و گراف آن را رسم کنید.

حل:

a. ناحیهٔ تعریف تابع $(-\infty ،+\infty)$ می‌باشد در حقیقت تابع در این ناحیه متمادی است.

b. نقاط تقاطع منحنی تابع با محور y:

$$\left.\begin{aligned} x&=0\\ y&=0^2-0-2\\ y&=-2 \end{aligned}\right\}\quad (0,-2)$$

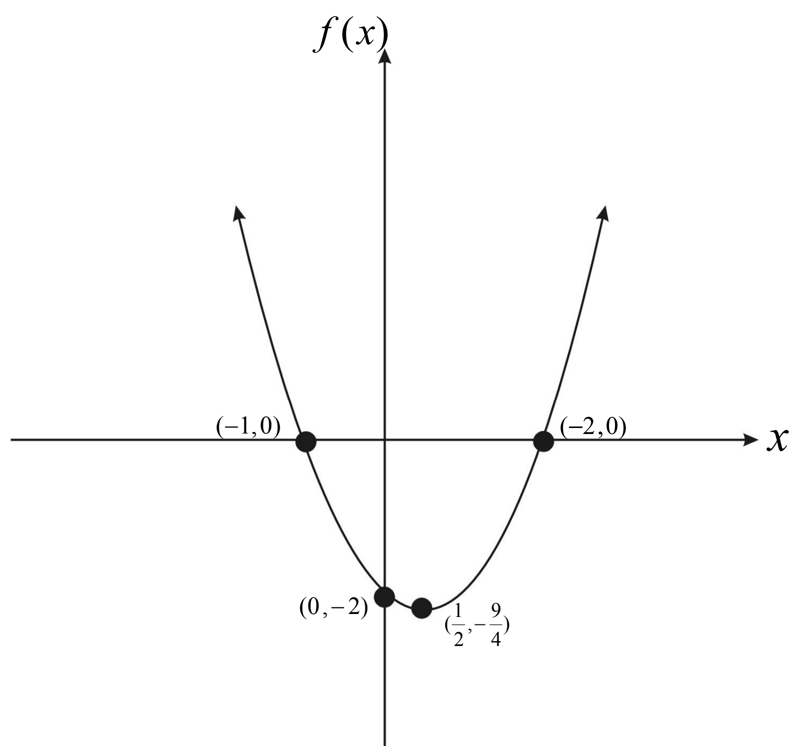
c. نقاط تقاطع منحنی تابع با محور x:

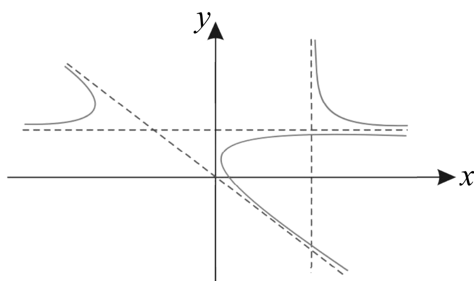
$$y=0$$
$$x^2-x-2=0$$
$$(x-2)(x+1)=0$$
$$x-2=0 \;\Rightarrow\; x_1=2 \qquad (2,0)$$
$$x+1=0 \;\Rightarrow\; x_2=-1 \qquad (-1,0)$$

d. برای یافتن نقاط بحرانی تابع نقاط صفری مشتق اول تابع را دریافته، جدول آنرا ترتیب و گراف آنرا رسم می کنیم:

$$f(x)=x^2-x-2$$
$$f'(x)=2x-1=0$$
$$2x-1=0 \;\Rightarrow\; 2x=1 \quad , \quad x=\frac{1}{2}$$
$$f(\frac{1}{2})=(\frac{1}{2})^2-\frac{1}{2}-2=\frac{1}{4}-\frac{1-4}{2}=\frac{1}{4}-\frac{5}{2}=\frac{2-20}{8}=\frac{-18}{8}$$
$$=-\frac{9}{4} \;\Rightarrow\; v\in(\frac{1}{2},-\frac{9}{4})$$

x	$-\infty$		-1		0		$\frac{1}{2}=0.5$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$		↘	0	↘	-2	↘	$-\frac{9}{4}=-2.2$ min	↗	0	↗	





فصل سوم

عنوان درس: مجانب های گراف توابع

صفحهٔ کتاب(105)

وقت: یک ساعت درسی

اهداف آموزشی **- دانشی** **- مهارتی** **- ذهنیتی**	- شاگردان مفهوم مجانب ها را بدانند. - شاگردان مجانب های منحنی یک تابع را رسم کرده بتوانند. - شاگردان از ترسیم گراف منحنی های یک تابع احساس خوشی نمایند و آنرا در زنده گی روز مره به کار ببرند.
روش های تدریس	سؤال وجواب، کار گروهی و انفرادی...
مواد ممد درسی	چارت شکل ورودی
توضیح ورودی **(5) دقیقه**	بعد از انجام کار های مقدماتی تدریس که بعد از داخل شدن به صنف برای هر معلم ضروری است بخش ورودی را توضیح کنید. برای این کار چارتی را که از قبل آماده نموده اید پیش روی صنف آویزان و از شاگردان بپرسید: - در شکل چند نوع خطوط نقطه، نقطه را می بینید. - این خطوط به کدام نام ها یاد میشوند. اگر شاگردان موفق به جواب سؤال دوم نگردیدند شما آنها را رهنمایی نمایید.

فعالیت جریان درس: (28) دقیقه

شاگردان را به گروه های مناسب تقسیم نمایید و هر گروه را موظف سازید تا اعضای آن با مشورهٔ یکدیگر فعالیت صفحهٔ (105) کتاب درسی را انجام دهند. در اثنای اجرای کار گروهی از گروه ها نظارت نمایید تا تمام شاگردان با علاقه‌مندی به کار گروهی سهم داشته باشند و اگر به مشکلی رو به رو شدند آنها را رهنمایی کنید. در ختم کار گروهی از نمایندهٔ یک گروه بخواهید تا فعالیتی را که انجام داده اند به دیگران توضیح دهند؛ اگر هنگام توضیح اشتباهی موجود می باشد آنرا اصلاح نمایید. نتیجهٔ که از انجام فعالیت مذکور به وجود می آید به شاگردان بیان کنید حال انواع مجانب ها را با اشکال مربوط آنها به شاگردان توضیح کنید که آنها نیز سهم فعال داشته باشند؛ یعنی در جریان توضیحات شما بعضی سؤال ها نمایید و آنها جواب های قناعت بخش باید ارایه نمایند مثال(1) صفحهٔ(106) کتاب درسی را روی تخته بنویسید و آنرا طوری حل کنید که شاگردان سهم فعال داشته باشند.

اکنون مثال(2) صفحهٔ (106) کتاب را روی تخته بنویسید و از یک شاگرد داوطلب بخواهید تا آنرا روی تخته حل نماید. همزمان از سایر شاگردان بخواهید تا سؤال مذکور را به صورت انفرادی به کتابچه های شان حل کنند. در پایان کار، اگر در حل سؤال روی تخته اشتباهی موجود بود از یک شاگرد بخواهید تا آنرا تصحیح نماید. زمانیکه مطمئن شدید که حل سؤال روی تخته کاملاً درست است از سایر شاگردان بخواهید تا سؤال حل شدهٔ کتابچه‌های شان را با سؤال حل شدهٔ روی تخته مقایسه نمایند تا اگر کدام اشتباهی در حل سؤال وجود داشته باشد آنرا اصلاح نمایند.

تحکیم درس: (7) دقیقه

برای اینکه درس جدید به صورت بهتر ذهن نشین گردد، مثال(3) صفحهٔ(107) کتاب را روی تخته بنویسید و آنرا طوری حل نمایید که شاگردان نیز سهم داشته باشند.

همچنان روش عمومی تعیین مجانب‌ها را که در صفحهٔ(107) کتاب موجود است به شاگردان توضیح نمایید.

ارزیابی ختم درس: (5) دقیقه

جهت اطمینان خاطر تان که آیا شاگردان درس جدید را فرا گرفته اند یا خیر؟چنین ارزیابی کنید:

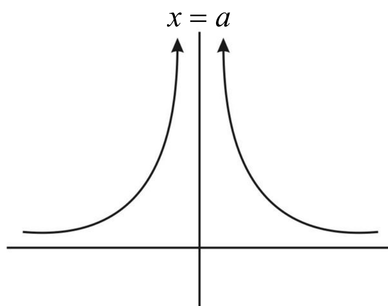
- سه شاگرد را پیش روی صنف دعوت کنید و از آنها بخواهید تا یکی آن مجانب عمودی، دیگر آن مجانب مایل و سومی مجانب افقی را در توابع بیان نمایند.
- از یک شاگرد بخواهید تا روش عمومی تعیین مجانب ها را بیان کند.

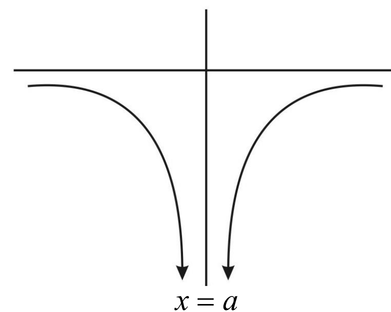
معلومات اضافی:

خط $x = a$ مجانب عمودی تابع F می‌باشد حداقل از حالات زیر برقرار شود:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$$





جواب به سؤال های تمرین

مجانب های توابع ذیل را تعیین نمایید:

1) $f(x) = \dfrac{3x-6}{x^2-x-2}$ 2) $f(x) = \dfrac{-2x^2}{x^2+1}$ 3) $f(x) = \dfrac{8}{x^2-4}$

حل 1):

a. **مجانب‌عمودی:** برای دریافت مجانب عمودی مخرج کسر تابع را مساوی به صفر قرار می‌دهیم:

$x^2 - x - 2 = 0$

$(x-2)(x+1) = 0$

$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$

$x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$

پس خطوط مستقیم $x = 2$ و $x = -1$ مجانب‌های عمودی تابع اند.

b. **مجانب افقی:** برای دریافت مجانب افقی لیمیت تابع را دریافت می کنیم؛ طوریکه $x \to \pm\infty$ کند.

$$y = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} (\frac{3x-6}{x^2-x-2}) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{3x}{x^2}-\frac{6}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{x}{x^2}-\frac{2}{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{3}{x}-\frac{6}{x^2}}{1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}} = \frac{0}{1} = 0$$

پس دیده می‌شود که $y = 0$ مجانب افقی می باشد که عبارت از محور x است.

c. مجانب مایل: تابع دارای مجانب مایل نمی‌باشد؛ زیرا که مجانب افقی دارد.

حل 2)

a. **مجانب عمودی:** برای دریافت مجانب عمودی مخرج کسر را مساوی به صفر قرار می‌دهیم:

$$x^2+1=0 \quad \Rightarrow \quad x^2=-1 \quad , \quad x=\sqrt{-1}$$

مجانب عمودی ندارد.

b. **مجانب افقی:** برای دریافت مجانب افقی لیمیت تابع را پیدا می کنیم:

$$y = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-2x^2}{x^2+1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{-2x^2}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}+\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-2}{1+\frac{1}{x^2}} = -2$$

خط مستقیم $y=-2$ عبارت از مجانب افقی تابع است.

حل 3)

a. **مجانب عمودی:** برای دریافت مجانب عمودی مخرج کسر را مساوی به صفر قرار می‌دهیم:

$$x^2-4=0 \quad \Rightarrow \quad x^2=4 \quad , \quad x=\pm 2$$

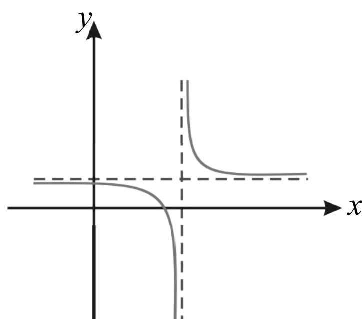
پس خطوط مستقیم $x=2$ و $x=-2$ مجانب‌های عمودی تابع اند.

b. **مجانب افقی:** برای دریافت مجانب افقی لیمیت تابع را می‌یابیم:

$$y = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{8}{x^2-4} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{8}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{4}{x^2}} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{8}{x^2}}{1-\frac{4}{x^2}}$$

$$= \frac{0}{1-0} = \frac{0}{1} = 0$$

پس $y=0$ مجانب افقی تابع می‌باشد که عبارت از محور x است.



فصل سوم

عنوان درس: گراف توابع هومو گرافیک

صفحهٔ کتاب (109)

وقت : یک ساعت درسی

اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	- شاگردان مجانب‌های توابع را دریافت کرده بتوانند. - شاگردان نقاط تقاطع گراف را با محورهای x و y دریافت کرده بتوانند. - شاگردان از ترسیم گراف توابع هوموگرافیک در حیات روزمره کار بگیرند.
روش های تدریس	سؤال وجواب، کار گروهی و کار انفرادی...
مواد ممد درسی	چارت شکل ورودی
توضیح ورودی (5) دقیقه	بعد از انجام کار های مقدماتی تدریس که بعد از داخل شدن در صنف ضرور است به توضیح بخش ورودی اقدام نمایید. چارتی را که از قبل تهیه نموده اید آنرا پیش‌روی صنف آویزان و از شاگردان بپرسید: - در شکل، گراف کدام نوع تابع را مشاهده می کنید؟ - مجانب های عمودی و افقی گراف تابع متذکره را در شکل نشان دهید. - این مجانب ها چطور ترسیم گردیده است؟

فعالیت جریان درس: (28) دقیقه

شاگردان را به گروه های مناسب تقسیم کنید و به هر گروه وظیفه دهید تا تمام اعضای آن با مشورهٔ یکدیگر فعالیت صفحهٔ (109) کتاب درسی را انجام دهند. در جریان فعالیت از گروه ها نظارت نمایید تا تمام شاگردان به صورت فعال در کار گروهی سهم داشته باشند و اگر به مشکلی رو به رو شدند رهنمایی کنید. در ختم فعالیت از نمایندهٔ یک گروه بخواهید تا فعالیتی را که انجام داده اند به دیگران توضیح دهد. در جریان توضیح، اگر اشتباهی موجود باشد آنرا اصلاح نمایید.

بعد از انجام فعالیت، تعریفی که در مورد تابع هوموگرافیک و توضیحی که در مورد مجانب های افقی و عمودی در صفحهٔ(109) کتاب درسی آمده است به شاگردان بیان داشته و تفهیم نمایید.

اکنون مثال(1) صفحهٔ(109) کتاب درسی را روی تخته بنویسید و آنرا حل نمایید طوریکه شاگردان نیز سهم فعال داشته باشند.

مثال(2) صفحهٔ(110) کتاب درسی را روی تخته بنویسید و از یک شاگرد بخواهید تا آنرا روی تخته حل نماید. همزمان از سایر شاگردان بخواهید تا هر یک به شکل انفرادی سؤال مذکور را در کتابچه‌های شان حل نمایند.

اگر در حل روی تخته اشتباهی موجود باشد از یک شاگرد داوطلب بخواهید تا آنرا تصحیح نمایید. زمانیکه مطمئن شدید که حل سؤال روی تخته کاملاً درست است از سایر شاگردان بخواهید تا سؤال حل شدهٔ کتابچه‌های شان را با سؤال حل شدهٔ روی تخته مقایسه نمایند.

تحکیم درس: (7) دقیقه

برای اینکه شاگردان درس جدید را درست فراگیرند مثال(3) صفحهٔ(111) کتاب درسی را روی تخته نوشته و آنرا حل کنید و شاگردان نیز فعالانه سهم داشته باشند. هنگام حل مثال از شاگردان سؤال کنید و جواب های درست به دست آرید تا آنها نیز خود را در حل مثال شریک بدانند.

ارزیابی ختم درس: (5) دقیقه

برای اینکه مطمئن شوید آیا شاگردان درس جدید را فرا گرفته اند یا خیر؟ آنها را طور ذیل ارزیابی کنید:

- کی می‌تواند بگوید که توابع هوموگرافیک چه نوع توابع و دارای کدام شکل اند؟
- کی می تواند بگوید که مجانب های افقی و عمودی توابع هوموگرافیک چطور دریافت می گردد؟
- کی می تواند به ترتیب مراحل تحولات تابع و طریق ترسیم گراف توابع هومو گرافیک را بیان کند؟

معلومات اضافی

برای بررسی توابع هوموگرافیک نکات ذیل باید در نظر گرفته شود:

- مطالعهٔ ناحیهٔ تعریف و ناحیهٔ قیمت‌های تابع.
- تعیین مجانب‌ها(مجانب عمودی یا قایم و مجانب افقی).
- مشتق آن $y' = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$ باشد به شرطیکه $(c \neq 0 \,,\, \frac{a}{c} \neq \frac{b}{d})$
- این تابع نقطهٔ بحرانی و نقطه انعطاف ندارد.
- اگر $ad-bc>0$ باشد، تابع دارای اعظمی و اگر $ad-bc<0$ باشد تابع دارای اصغری می باشد.
- اگر تابع هوموگرافیک $ad-bc=0$ باشد گراف آن خطی و موازی به محور y ها و تابع به یک تابع ثابت تبدیل می گردد.
- ترتیب جدول و ترسیم گراف

جواب به سؤال های تمرین

1- تحولات تابع $f(x) = \frac{x-1}{x+3}$ را تحقیق و گراف را ترسیم کنید.

حل:

a. ساحهٔ تعریف تابع $D_f \to IR \setminus \{-3\}$ یعنی تابع در نقطهٔ $x=-3$ تعریف نگردیده است.

b. نقطهٔ تقاطع منحنی تابع با محور y:

$$x=0 \;,\quad y=\frac{0-1}{0+3}=\frac{-1}{3}=-\frac{1}{3} \;\Rightarrow\; (0,-\frac{1}{3})$$

c. نقطهٔ تقاطع منحنی تابع با محور x:

$$y=0 \;,\quad x-1=0 \;\Rightarrow\; x=1 \;\Rightarrow\; (1,0)$$

d. تعیین مجانب‌ها:

الف: مجانب عمودی: $x+3=0 \;\Rightarrow\; x=-3$ یا $x=-\frac{d}{c}=-3$

ب: مجانب افقی

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x-1}{x+3} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{x}{x}-\frac{1}{x}}{\frac{x}{x}+\frac{3}{x}} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{3}{x}} = 1$$

یا:
$$f(x) = \frac{a}{c} = \frac{1}{1} = 1$$

e. بعضی نقاط دیگر گراف تابع را دریافته، جدول آنرا ترتیب و گراف را ترسیم می‌نماییم:

$$f(x) = \frac{x-1}{x+3}$$

$$f'(x) = \frac{(x-1)'\cdot(x+3)-(x-1)(x+3)'}{(x+3)^2} = \frac{x+3-(x-1)}{(x+3)^2}$$

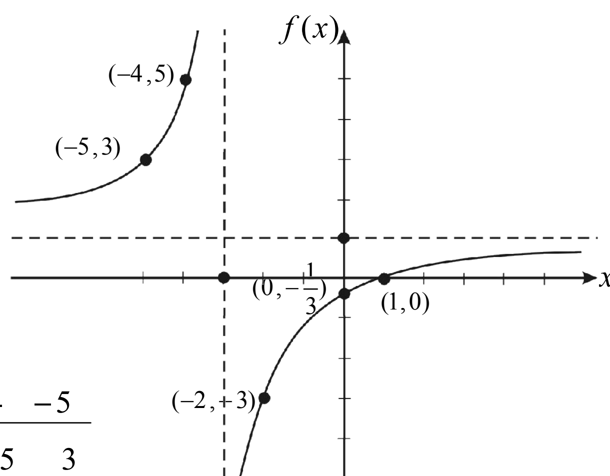
$$= \frac{x+3-x+1}{(x+3)^2} = \frac{4}{(x+3)^2} > 0$$ (پس تابع همیشه متزاید است)

$$f''(x) = \frac{(4)'(x+3)^2-4[(x+3)^2]'}{(x+3)^4} = \frac{-4[2(x+3)]}{(x+3)^4}$$

$$= \frac{-8(x+3)}{(x+3)^4} = \frac{-8}{(x+3)^3}$$

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	‖	$+$
$f''(x)$	$+$	‖	$-$
$f(x)$	$1 \nearrow +\infty$ ($\cup$)	‖	$-\infty \nearrow 1$ ($\cap$)

نه دی تعریف شوی



x	0	1	-2	-4	-5
$f(x)$	$-\frac{1}{3}$	0	-3	5	3

2- تحولات تابع $f(x) = \dfrac{x}{x-4}$ را تحقیق و ترسیم نمایید.

حل: $x-4=0 \Rightarrow x=4$

a. چون مخرج کسر برای $x=4$ صفر می‌شود؛ پس تابع به استثنای $x=3$ دیگر به تمام قیمت‌های متحول معین است؛ یعنی ناحیۀ تعریف تابع $D_f \to IR\setminus\{4\}$.

b. نقطۀ تقاطع منحنی تابع با محور y: $x=0 \quad , \quad y=\dfrac{0}{0-4}=0 \Rightarrow (0,0)$

c. نقطۀ تقاطع منحنی تابع با محور x: $y=0 \quad , \quad x=0 \Rightarrow (0,0)$

d. تعیین مجانب‌ها

الف: مجانب عمودی

$$\lim_{x\to 4}\frac{x}{x-4}=\infty$$

$$x-4=0 \;\Rightarrow\; x=4 \text{ یا } x=-\frac{d}{c}=-\frac{-4}{1}=4$$

ب: مجانب افقی

$$y=\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x-4}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{x}{x}}{\frac{x}{x}-\frac{4}{x}}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{1-\frac{4}{x}}=\frac{1}{1-0}=\frac{1}{1}=1$$

یا: $f(x)=\frac{a}{c}=\frac{1}{1}=1$

e. نقاط بحرانی تابع را دریافته، جدول آن را ترتیب و گراف آنرا ترسیم می‌نماییم:

$$f(x)=\frac{x}{x-4}$$

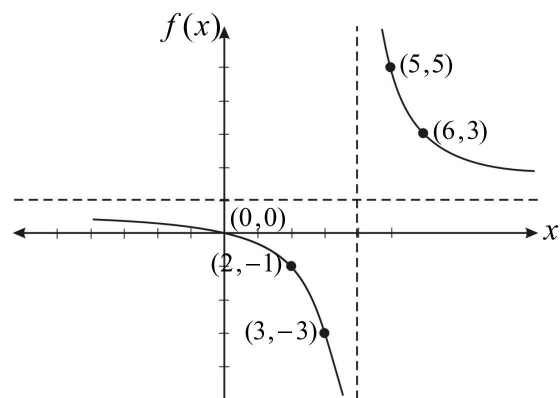
$$f'(x)=\frac{x'(x-4)-x(x-4)'}{(x-4)^2}=\frac{x-4-x}{(x-4)^2}=\frac{-4}{(x-4)^2}<0$$ (پس تابع همیشه متناقص است)

$$f''(x)=\frac{(-4)'(x-4)^2-(-4)[(x-4)^2]'}{(x-4)^4}=\frac{4[2(x-4)]}{(x-4)^4}$$

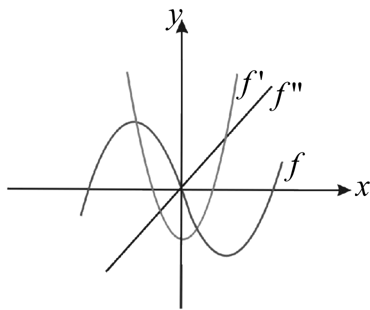
$$=\frac{8(x-4)}{(x-4)^4}=\frac{8}{(x-4)^3}$$

x	$-\infty$	4	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	‖	$-$
$f''(x)$	$-$	‖	$+$
$f(x)$	$\cap$ $1 \searrow -\infty$	‖	$\cup$ $+\infty \searrow 1$

نه دی تعریف شوی



x	0	2	3	5	6
$f(x)$	0	−1	−3	5	3



فصل سوم

عنوان درس: گراف تابع یک مجهوله درجه سوم

صفحۀ کتاب (113)

وقت: یک ساعت درسی

اهداف آموزشی **- دانشی** **- مهارتی** **- ذهنیتی**	- شاگردان طریق رسم گراف تابع یک مجهوله درجه سوم را بدانند. - شاگردان گراف تابع یک مجهوله درجه سوم را رسم کرده بتوانند. - شاگردان از ترسیم گراف تابع یک مجهوله درجه سوم احساس خو شی نموده و در مسایل حیات روز مره آنرا به کار ببرند.
روش های تدریس	سؤال وجواب، کار گروهی و انفرادی...
مواد ممد درسی	چارت شکل ورودی
توضیح ورودی **(5) دقیقه**	بعد از انجام کار های مقدماتی تدریس که بعد از داخل شدن به صنف برای هر معلم ضروری است به توضیح بخش ورودی بپردازید. چارتی را که از قبل آماده نموده اید پیش روی صنف آویزان کنید و به شاگردان بگویید شما در شکل، گراف‌های سه نوع توابع را می بینید. آیا کدام یکی از شما در مورد گراف تابع f نظر خود را ابراز کرده می‌توانید؟ کوشش کنید جواب درست به دست آرید؛ به همین ترتیب نظریات شاگردان را در مورد گراف های توابع f' و f'' نیز اخذ نمایید.

فعالیت جریان درس: (28) دقیقه

شاگردان را به گروه های مناسب تقسیم کنید و هر گروه را موظف سازید تا تمام اعضای آن با مشورۀ یکدیگر فعالیت صفحۀ(113) را انجام دهند. در جریان کار از گروه ها نظارت نمایید تا تمام شاگردان در فعالیت گروهی به صورت فعال سهم داشته باشند و اگر در اثنای کار گروهی به مشکلی رو به رو می شوند آنها را رهنمایی نمایید. در ختم فعالیت از نمایندۀ یک گروه تقاضا کنید تا فعالیتی را که انجام داده اند به دیگران توضیح نمایند، اگر در جریان توضیح اشتباهی موجود باشد آنها را اصلاح کنید. در ختم فعالیت پنج مرحله یعنی از شماره 1-5 (از صفحۀ 113 الی115) کتاب درسی را توضیح و اشکال مربوطۀ آنها را ترسیم نمایید و شاگرد داوطلب نیز سهم فعال داشته باشند.

مثال 1 صفحۀ(115) کتاب درسی را روی تخته بنویسید و آنرا حل نمایید شاگردان نیز سهم فعال داشته باشند.

اکنون مثال 2 صفحۀ(116) کتاب درسی را روی تخته بنویسید و از یک شاگرد داوطلب بخواهید تا آنرا روی تخته حل نماید. همزمان از سایر شاگردان تقاضا نمایید تا مثال مذکور را هر یک به شکل انفرادی به کتابچه های شان حل نمایند. در اخیر اگر در حل سؤال روی تخته اشتباهی موجود بود آنرا اصلاح کنید. زمانیکه مطمئن شدید که حل سؤال روی تخته کاملاً درست است از سایر شاگردان بخواهید تا سؤال حل شدۀ کتابچه‌های شان را با سؤال حل شدۀ روی تخته مقایسه کنند.

تحکیم درس: (7) دقیقه

برای اینکه شاگردان درس جدید را بهتر فراگیرند، مثال(3) صفحهٔ(118) کتاب درسی را روی تخته بنویسید و آنرا طوری حل نمایید که شاگردان نیز سهم فعال داشته باشند.

ارزیابی ختم درس: (5) دقیقه

به منظور اینکه مطمئن شوید آیا شاگردان درس جدید را فرا گرفته اند یا خیر؟طور ذیل ارزیابی نموده، از شاگردان بپرسید:

- هنگام تحولات یک تابع، چطور میتوان نقاط اعظمی و اصغری را دریافت کرد؟
- نقاط تقاطع با محورات را چطور میتوان پیدا نمود؟
- برای دریافت نقطهٔ انعطاف چه باید کرد؟

جواب به سؤال های تمرین

جدول تحولات توابع ذیل را ترتیب و گراف آن را رسم کنید؟

1- $f(x)=-(x-1)^3$, $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+x+1$

حل1): جهت تعیین علامهٔ این تابع ابتدا مشتق گرفته، بعد مشتق آنرا مساوی به صفر قرار می‌دهیم:

$$f'(x)=\frac{3}{3}x^2-2x+1$$
$$=x^2-2x+1=(x-1)^2$$
$$f'(x)=0$$
$$(x-1)^2=0 \Rightarrow x=1$$

برای تعیین نقطهٔ انعطاف $f''(x)$ را مطالعه می‌نماییم:

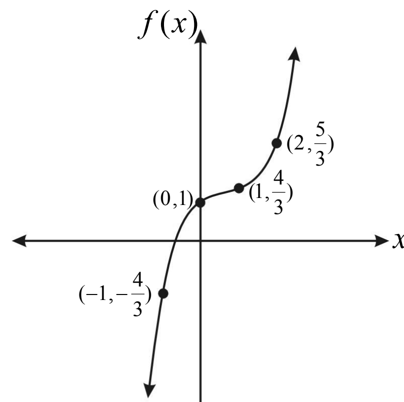
$$f''(x)=2(x-1)$$
$$f''(x)=0$$
$$2(x-1)=0 \Rightarrow x-1=0 \quad , \quad x=1$$
$$f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+x+1$$
$$f(1)=\frac{1}{3}\cdot1^3-1^2+1+1=\frac{1}{3}-1+2=\frac{1}{3}+1=\frac{4}{3}$$
$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty \quad , \quad \lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\cap$ ↗	$\frac{4}{3}$	↗ $\cup$	$+\infty$

برای ترسیم دقیق گراف قیمت‌های $f(2), f(0)$ و $f(-1)$ ر ابرای تابع می‌دهیم:

$$f(0)=\frac{0^3}{3}-0^2+0+1=1$$
$$f(2)=\frac{2^3}{3}-2^2+2+1=\frac{8}{3}-4+3=\frac{8}{3}-1=\frac{5}{3}$$
$$f(-1)=\frac{(-1)^3}{3}-(-1)^2+(-1)+1=\frac{-1}{3}-1-1+1=\frac{-1}{3}-2+1=\frac{-1}{3}-1=\frac{-4}{3}$$

حال با استفاده از نقاط دریافت شدهٔ $(-1,-\frac{4}{3})$, $(1,\frac{4}{3})$, $(0,1)$ و $(2,\frac{5}{3})$ گراف را ترسیم می‌کنیم:



حل b:

$f''(x) = -6(x-1)$

$f''(x) = 0$

$-6(x-1) = 0 \Rightarrow x-1 = 0 \quad , \quad x = 1$

$f(1) = -(1-1)^3 = 0$ پس نقطهٔ انعطاف تابع $(1,0)$ است.

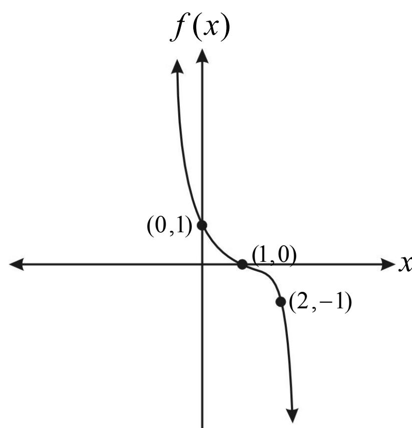
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \qquad , \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$-$
$f''(x)$	$+$	0	$-$
	$+\infty$ $\cup$ ↘	0	$\cap$ ↘ $-\infty$

حال برای ترسیم دقیق گراف، نقاط $f(0)$ و $f(2)$ را به دست می‌آوریم:

$f(0) = -(0-1)^3 = 1$

$f(2) = -(2-1)^3 = -(1)^3 = -1$



2- مختصات مرکز تناظر تابع $f(x)=-2x^2+6x-3$ را پیدا کنید.

حل:

$$f'(x)=-4x+6$$

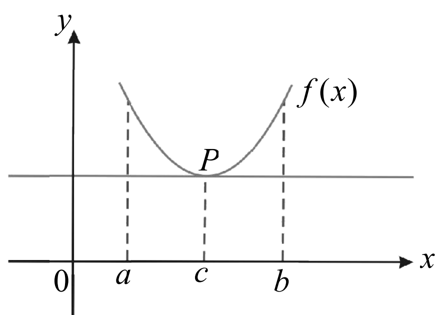
$$f'(x)=0 \Rightarrow -4x+6=0$$

$$-4x=-6$$

$$x=\frac{6}{4} \Rightarrow x=\frac{3}{2}$$

$$f(\frac{3}{2})=-2(\frac{3}{2})^2+6(\frac{3}{2})-3=-\frac{9}{2}+9-3=-\frac{9}{2}+6=\frac{3}{2}$$

در نتیجه مختصات مرکزی تناظر تابع فوق عبارت از $(\frac{3}{2},\frac{3}{2})$ می‌باشد.



فصل سوم

عنوان درس: قضیۀ رول

صفحۀ کتاب (119)

وقت: یک ساعت درسی

اهداف آموزشی **- دانشی** **- مهارتی** **- ذهنیتی**	- شاگردان مفهوم قضیۀ رول را بدانند. - شاگردان قضیۀ رول را ثبوت کرده بتوانند. - شاگردان عدد c را دریافت کرده بتوانند که $f(c)=0$ شود. - شاگردان از ثبوت قضیۀ رول احساس خوشی نمایند. - شاگردان بدانند که در تمام توابع قضیۀ رول صدق نمی کند.
روش های تدریس	سؤال وجواب،کار گروهی و انفرادی...
مواد ممد درسی	چارت شکل ورودی- چارت شکل مربوط به فعالیت صفحۀ (119) کتاب درسی
توضیح ورودی **(5) دقیقه**	ابتدا کار های مقدماتی تدریس که بعد از داخل شدن به صنف برای هر معلم ضروری است انجام دهید؛ سپس به توضیح بخش ورودی اقدام نمایید طوریکه شاگردان نیز سهم فعال داشته باشند. برای این کار از شاگردان بپرسید: - در شکل چی می بینید؟ نام بگیرید. - رابطۀ مستقیم (Δ) با تابع $f(x)$ چیست؟ - $f'(c)$ کدام مقدار را نشان میدهد. زمانیکه از شاگردان جواب های درست به دست آوردید موضوع شکل ورودی را به شاگردان واضح سازید.

فعالیت جریان درس: (28) دقیقه

چارت مربوط به فعالیت صفحۀ(119) کتاب درسی راکه از قبل آماده نموده اید پیش روی صنف آویزان کنید بعد شاگردان را به گروه های مناسب تقسیم کنید و به هر گروه وظیفه دهید تا تمام اعضای گروه ها با مشورۀ یکدیگر فعالیت صفحۀ(119) کتاب درسی را انجام دهند. در جریان کار گروهی از گروه ها نظارت به عمل آرید تا تمام ا عضای هر یک از گروهها به صورت فعال در فعالیت گروهی سهم داشته باشند؛ اگر در اجرای فعالیت به مشکلی رو به رو شدند آنهار را رهنمایی کنید.

در ختم فعالیت گروهی از نمایندۀ یک گروه بخواهید تا فعالیتی را که انجام داده اند به دیگران توضیح دهد. اگر در جریان توضیحات اشتباهی موجود بود آنها را تصحیح کنید.

قضیۀ صفحۀ(119) کتاب درسی را روی تخته بنویسید بعد آنرا ثبوت کنید طوریکه شاگردان نیز سهم داشته باشند.

اکنون مثال(1) صفحۀ(120) کتاب درسی را روی تخته بنویسید و از یک شاگرد داوطلب بخواهید تا آنرا روی تخته حل نماید. همزمان از سایر شاگردان بخواهید تا مثال مذکور را در کتابچه های شان به صورت انفرادی حل کنند؛ اگر در حل سؤال روی تخته اشتباهی موجود بود از یک شاگردان دیگر بخواهید تا آنرا اصلاح نماید. زمانیکه مطمئن

شدید که حل سؤال روی تخته کاملاً درست است از سایر شاگردان بخواهید تا سؤال حل شدهٔ کتابچه‌های شان را با سؤال حل شدهٔ روی تختهمقایسه کنند.

تحکیم درس: (7) دقیقه

برای اینکه درس جدید را شاگردان بهتر فرار گیرند، مثال(2) صفحهٔ(120) کتاب درسی را روی تخته بنویسید و آنرا حل کنید؛ طوریکه شاگردان سهم فعال داشته باشند. به این معنی که در جریان حل مثال سؤال‌ها طرح کرده و از شاگردان جواب های قناعت بخش به دست آرید، تا شاگردان خود را در حل مثال سهیم بدانند.

ارزیابی ختم درس: (5) دقیقه

جهت اطمینان که آیا شاگردان درس جدید را فرا گرفته اند یا خیر؟ارزیابی نمایید؛ مثلاً از شاگردان بپرسید:

- کی میتواند مفهوم قضیهٔ رول را به زبان ساده بیان نماید؟

- کی میتواند در شکل ورودی بالای منحنی $f(x)$ نقطهٔ را نشان دهد که اگر در آن نقطه به منحنی مماس رسم شود این مماس موازی به محور x باشد.

جواب به سؤال های تمرین

1- قیمت x_0 را در تابع $f(x)=\sqrt{x(4-x)}$ در انتروال $[0,4]$ طوری پیدا کنید که قضیهٔ رول در آن صدق کند؟

حل: تابع $f(x)=\sqrt{x(4-x)}$ در انتروال $[0,4]$ متمادی و در انتروال $(0,4)$ مشتق پذیر است، طور ذیل :

$$f'(x)=\frac{[x(4-x)]'}{2\sqrt{x(4-x)}}=\frac{[4x-x^2]'}{2\sqrt{x(4-x)}}=\frac{4-2x}{2\sqrt{x(4-x)}}=\frac{2(2-x)}{2\sqrt{x(4-x)}}=\frac{2-x}{\sqrt{x(4-x)}}$$

$$f(0)=\sqrt{0(4-0)}=0$$

$$f(4)=\sqrt{4(4-4)}=0$$

از اینجا $f(0)=f(4)=0$ بوده؛ پس تمام شرایط قضیهٔ رول موجود است، همچنان نقطهٔ $x_0=2$ در شرط $f'(x_0)=0$ صدق می کند؛ یعنی:

$$f'(x)=\frac{2-x}{\sqrt{x(4-x)}}$$

$$f'(x_0)=f'(2)=\frac{2-2}{\sqrt{2(4-2)}}=\frac{0}{\sqrt{2(2)}}=\frac{0}{\sqrt{4}}=\frac{0}{2}=0$$

فصل سوم

عنوان درس: قضیهٔ قیمت متوسط (قضیه لاگرانژ)

صفحهٔ کتاب (121)

وقت: یک ساعت درسی

اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	- شاگردان مفهوم قضیهٔ قیمت متوسط را بدانند. - شاگردان قضیهٔ قیمت متوسط را ثبوت کرده بتوانند. - شاگردان از ثبوت قضیهٔ قیمت متوسط احساس خوشی نموده و آنرا در مسایل حیات روزمره به کار ببرند.
روش های تدریس	سؤال وجواب، کار گروهی و کار انفرادی...
مواد ممد درسی	چارت شکل فعالیت صفحهٔ 121 کتاب درسی
توضیح ورودی **(5) دقیقه**	کار های مقدماتی تدریس که بعد از داخل شدن در صنف و برای هر معلم ضرور است انجام دهید. چون این درس بخش ورودی ندارد؛ بنابر این به جریان درس داخل شوید.

فعالیت جریان درس: (28) دقیقه

شاگردان را به گروه های مناسب تقسیم نموده و به هر یک از این گروه‌ها وظیفه دهید تا فعالیت صفحهٔ(121) کتاب درسی را انجام دهند. در جریان فعالیت از گروه ها نظارت نمایید تا تمام اعضای گروه در فعالیت سهم فعال داشته باشند؛ اگر در جریان فعالیت به کدام مشکل روبه رو شدند آنها را رهنمایی کنید. در ختم فعالیت از نمایندهٔ یک گروه بخواهید تا فعالیتی را که گروه شان انجام داده است به دیگران توضیح نماید. اگر در انجام فعالیت داده شده اشتباهی موجود باشد آنرا اصلاح نمایید.

قضیهٔ صفحهٔ(121) کتاب درسی را روی تخته نوشته و آنرا با سهم گیری فعال شاگردان ثبوت نمایید.

تحکیم درس: (7) دقیقه

برای اینکه شاگردان درس جدید را بهتر فرا گیرند مثال صفحهٔ(122) کتاب درسی را روی تخته بنویسید واز یک شاگرد داوطلب بخواهید تا آنرا روی تخته حل نماید. همزمان از سایر شاگردان بخواهید تا مثال مذکور را به صورت انفرادی در کتابچه های شان حل کنند. اگر در حل روی تخته اشتباهی موجود بود از یک شاگرد بخواهید تا آنرا اصلاح نماید. زمانیکه مطمئن شدید حل سؤال روی تخته کاملاً درست است از سایر شاگردان بخواهید تا سؤال حل شدهٔ کتابچه‌های شان را با سؤال حل شدهٔ روی تخته مقایسه نمایند.

ارزیابی ختم درس: (5) دقیقه

برای اینکه مطمئن شوید آیا شاگردان درس جدید را فرا گرفته اند یا خیر؟ آنها را ارزیابی نمایید، برای این کار تمرین شماره 1 صفحه 122 کتاب درسی را روی تخته بنویسید و از یک شاگرد داوطلب بخواهید تا آنرا حل نماید.

معلومات اضافی

ژوزف لویی لاگرانژ در سال 1736 در شهر تورن ایتالیا متولد گردید و در دوران کودکی نسبت به علوم طبیعی به هنر و ادبیات بیشتر علاقه داشت. در سن 16 ساله‌گی به استادی اکادمی توپخانه منصوب گردید و در سال(1761) به عنوان بزرگترین ریاضیدان عصر خود شناخته شد، مهم ترین کار های وی تحقیقات در مورد تیوری اعداد و میخانیک سماوی می باشد.

لاگرانژ به مدت(20) سال به دعوت فریدر یک کبیر در برلین زنده‌گی کرد؛ اما بعد از وفات فریدریک به دعوت لویی(16) به فرانسه رفت، استاد مدرسهٔ پولی تخنیک و رئیس کمیسیون اوزان مقیاسات آنجا شد. بالآخره در سال(1813) میلادی به سن 77 ساله‌گی در شهر پاریس درگذشت.

جواب به سؤال های تمرین

2- قیمت x_0 را در تابع $f(x)=\frac{x^3}{3}-2x$ در انتروال $[0,3]$ طوری پیدا کنید که قضیهٔ رول در آن صدق کند.

حل: تابع $f(x)=\frac{x^3}{3}-2x$ در انتروال $[0,3]$ متمادی و در انتروال $(0,3)$ مشتق پذیر است، داریم که:

$$f(x)=\frac{x^3}{3}-2x$$

$$f'(x)=(\frac{x^3}{3})'-(2x)'=\frac{(x^3)'\cdot 3-x^3\cdot(3)'}{3^2}-2$$

$$=\frac{3x^2\cdot 3}{9}-2=\frac{9x^2}{9}-2$$

$$=x^2-2$$

$$f(0)=\frac{0^3}{3}-2\cdot 0=0-0=0$$

$$f(3)=\frac{3^3}{3}-2\cdot 3=\frac{27}{3}-6=\frac{27-18}{3}=\frac{9}{3}=3$$

چون $f(0)\neq f(3)\neq 0$ است؛ پس تمام شرایط قضیهٔ رول موجود نبوده و شرط $f'(x_0)=0$ هم صادق نیست.

فصل: سوم

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

عنوان درس: قاعده هوپیتال

صفحهٔ کتاب (123)

وقت: یک ساعت درسی

اهداف آموزشی **- دانشی** **- مهارتی** **- ذهنیتی**	- شاگردان مفهوم قاعده هوپیتال را بدانند. - شاگردان قاعدهٔ هوپیتال را در سؤال‌های مربوط به آن تطبیق کرده بتوانند. - شاگردان لیمت توابع اشکال $\frac{0}{0}$ و $\frac{\infty}{\infty}$ را اختیار کند این گونه لیمیت‌ها را توسط قاعدهٔ هوپیتال دریافت کرده بتوانند. - شاگردان از به کار بردن قاعدهٔ هوپیتال در حل سؤال‌های مربوط احساس خوشی نمایند.
روش های تدریس	سؤال وجواب، کار گروهی وکار انفرادی...
مواد ممد درسی	چارت شکل ورودی
توضیح ورودی **(5) دقیقه**	نخست کار های مقدماتی تدریس که بعد از داخل در صنف برای هر معلم ضروری است انجام دهید، بعد به توضیح بخش ورودی بپردازید. چارت شکل ورودی را که از قبل آماده نموده اید پیش روی صنف آویزان و به شاگردان بگویید: - شما در شکل دقت کنید یک مساوات را می بینید. - کی گفته می‌تواند این مساوات چی را بیان می کند؟ کوشش نمایید از شاگردان جواب های قناعت به دست آرید، در غیر آن برای شان گفته شود که لیمیت حاصل تقسیم دو تابع مساویست به لیمیت حاصل تقسیم مشتق‌های توابع مذکور.

فعالیت جریان درس: (28) دقیقه

شاگردان را به گروه های مناسب تقسیم نموده به اعضای هر گروه وظیفه دهید تا با مشورت با یکدیگر فعالیت مربوطهٔ گروه شانرا انجام دهند. اگر در اجرای فعالیت مشکلی داشتند رهنمایی کنید و هم در جریان فعالیت از گروه ها نظارت به عمل آرید تا تمام شاگردان در فعالیت گروهی سهم فعال داشته باشند. در ختم کار گروهی از نمایندهٔ یک گروه بخواهید تا فعالیتی را که انجام داده به دیگران توضیح دهد. در جریان توضیحات اگر اشتباهی موجود باشد آن را اصلاح کنید.

با استفاده از نتیجه فعالیت بالا قاعده هوپیتال را بیان کنید تا شاگردان به مفهوم قاعدهٔ مذکور خوب پی ببرند.

اکنون مثال شماره(1) صفحهٔ(124) کتاب درسی را روی تخته بنویسید و بعد با استفاده از قاعدهٔ هوپیتال لیمیت آنرا دریافت کرده و شاگردان نیز سهم فعال داشته باشند. جزء دوم مثال(2) صفحهٔ(124) کتاب درسی را روی تخته بنویسید و از یک شاگرد داوطلب بخواهید تا آنرا روی تخته حل نماید؛ همزمان به شاگردان دیگر وظیفه دهید تا مثال مذکور را به شکل انفرادی در کتابچه های شان حل نمایند؛ اگر در حل سؤال روی تخته اشتباهی موجود بود از یک شاگرد داوطلب بخواهید تا آنرا اصلاح نماید. زمانیکه مطمئن شدید که حل سؤال روی تخته کاملاً درست است از شاگردان دیگر بخواهید تا سؤال حل شدهٔ کتابچه‌های شان را با سؤال حل شدهٔ روی تخته مقایسه کنند.

تحکیم درس: (7) دقیقه

برای اینکه شاگردان درس جدید را بهتر فرا گیرند مثال شماره(3) صفحهٔ(124) کتاب درسی را روی تخته بنویسید و آنرا حل نمایید طوریکه شاگردان نیز سهم فعال داشته باشند به این معنی که در جریان حل مثال از شاگردان سؤال کنید و جواب های قناعت بخش به دست بیاورید تا شاگردان خود را در پروسهٔ حل مثال سهیم بدانند.

ارزیابی ختم درس: (5) دقیقه

جهت اینکه مطمئن شوید که آیا درس جدید را شاگردان درست فرا گرفته اند یاخیر؟ طور ذیل ارزیابی نمایید:

- از شاگردان بپرسید کی میتواند قاعده هوپیتال را بیان کند؟

- یک مثال مانند مثال های کتاب درسی روی تخته بنویسید و از شاگردان بخواهید تا قاعدهٔ هوپیتال را در آن تطبیق نمایند.

معلومات اضافی

هوپیتال ریاضیدان فرانسوی و دارندهٔ اولین اثر منتشر شده در محاسبات تفاضلی(دیفرانسیل) می باشد که اساس لکچر های برنولی را تشکیل می دهد. هوپیتال در مورد یک سلسله مسایل پیچیدهٔ انالیز ریاضی تحقیق کرد، که از آن جمله حل مسالهٔ مهم براخیستو خران(براکیستو کران) در محاسبات واریاسیون، میتود محاسبهٔ لیمیت های مبهم با استفاده از مشتق منسوب به وی است. نام های هوپیتال، لوپیتال، هوسپیتال و دیل هوپیتال تلفظ با لهجه های مختلف از نام مکمل فرانسوی $(Del, Hospital)$ می باشد.

جواب به سؤال‌های تمرین

با استفاده از قاعدهٔ هوپیتال قیمت لیمیت های ذیل را دریافت کنید.

$$a)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} \quad , \quad b)\ \lim_{x\to 0}\frac{x^5-1}{x^3-1}$$

$$c)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x^3} \quad , \quad d)\ \lim_{x\to \infty}\frac{x^5}{3x^3}$$

حل:

$$a)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=?$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\frac{\sin 0}{0}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x)'}{x'}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}=\frac{\cos 0}{1}=\frac{1}{1}=1$$

$$b)\ \lim_{x\to 1}\frac{x^5-1}{x^3-1}=?$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^5-1}{x^3-1}=\frac{1-1}{1-1}=\frac{0}{0}=0$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x^5-1)'}{(x^3-1)'}=\lim_{x\to 1}\frac{5x^4}{3x^2}=\lim_{x\to 1}\frac{20x^3}{6x}=\lim_{x\to 1}\frac{60x^2}{6}=\frac{60\cdot 1}{6}=\frac{60}{6}=10$$

$$c)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x^3}=?$$

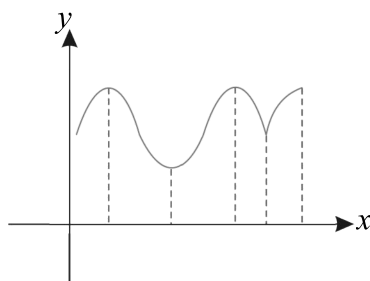
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x^3}=\frac{\sin 0}{0}=\frac{0}{0}=0$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x)'}{(x^3)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{6x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\cos x}{6}=\frac{-\cos 0}{6}=-\frac{1}{6}$$

$$d)\ \lim_{x\to\infty}\frac{x^5}{3x^3}=?$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^5}{3x^3}=\frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(x^5)'}{(3x^3)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{5x^4}{9x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{20x^3}{18x}=\lim_{x\to\infty}\frac{60x^2}{18}=\frac{60\cdot\infty}{18}=\frac{\infty}{18}=\infty$$



فصل: سوم

عنوان درس: تطبیق نقاط اعظمی و اصغری

صفحهٔ کتاب (125)

وقت:(3 ساعت درسی) ساعت اول درسی

اهداف آموزشی **- دانشی** **- مهارتی** **- ذهنیتی**	- شاگردان مفهوم تطبیق نقاط بحرانی را بدانند. - شاگردان نقاط بحرانی را تطبیق کرده بتوانند. - شاگردان از تطبیق نقاط بحرانی احساس خوشی نموده و در مسایل حیات روزمره آنرا به کار ببرند.
روش های تدریس	سؤال وجواب، کار گروهی و انفرادی...
مواد ممد درسی	چارت شکل ورودی
توضیح ورودی **(5) دقیقه**	ابتدا کار های مقدماتی تدریس که بعد از داخل شدن به صنف برای هر معلم ضروری است انجام دهید؛ سپس به توضیح بخش ورودی بپردازید طوریکه: چارتی را که از قبل آماده نموده اید پیش روی صنف آویزان کنید و از شاگردان بپرسید: - در شکل چی می بینید، بیان کنید؟ - بلند ترین و پایین ترین نقطه در شکل مذکور کدام ها اند نشا ن دهید؟ - بلند ترین و پایین ترین نقاط به کدام نام یاد میشوند بیان نمایید؟ اگر شاگردان به ارایهٔ پاسخ درست موفق نگردیدند شما به آنها بگویید: در شکل، گراف یا منحنی تابع در یک سیستم کمیات وضعیهٔ قایم دیده میشود. منحنی مذکور دارای بلندترین و پایینترین نقاط است که بلندترین نقاط به نام نقاط اعظمی و پایینترین نقاط به نام نقاط اصغری می گردد.

فعالیت جریان درس: (28) دقیقه

سؤال(1) صفحهٔ(125) کتاب درسی را روی تخته بنویسید و آنرا حل نمایید طوریکه شاگردان نیز سهم فعال داشته باشند؛ به این معنی که در هر قسمت، از شاگردان سؤال کنید و از آنها جواب‌های درست به دست آرید تا شاگردان خود را در حل سؤال سهیم بدانند.

سؤال(2) صفحهٔ(125) کتاب درسی را روی تخته بنویسید و از یک شاگرد داوطلب بخواهید تا آنرا روی تخته حل نماید. همزمان به شاگردان دیگر وظیفه دهید تا سؤال مذکور را هر یک به شکل انفرادی به کتابچه های شان حل نمایند. در پایان اگر در حل روی تخته اشتباهی وجود داشت از یک شاگرد داوطلب دیگر بخواهید تا آنرا اصلاح نماید. زمانیکه مطمئن شدید حل سؤال روی تخته کاملاً درست است. از شاگردان دیگر بخواهید تا سؤال حل شدهٔ کتابچه‌های شان را با سؤال حل شدهٔ روی تخته مقایسه نمایند تا اگر اشتباهی موجود باشد به اصلاح آن بپردازند.

تحکیم درس: (7) دقیقه

برای اینکه شاگردان به موضوعات درس امروزی خوبتر پی ببرند مثال(3) صفحهٔ(126) کتاب درسی را روی تخته بنویسید و آنرا حل کنید، طوریکه شاگردان در حل آن سهم فعال داشته باشند.

ارزیابی ختم درس: (5) دقیقه

برای اینکه مطمئن شوید آیا شاگردان موضوعات درس جدید را فرا گرفته اند یا خیر؟ مثال (4) صفحهٔ (126) کتاب درسی را روی تخته بنویسید و از یک شاگرد بخواهید تا آنرا حل کند؛ اگر در حل آن به مشکلی رو به رو گردیدند آنها رهنمایی و کمک نمایید.

جواب به سؤال های تمرین

1- تحولات تابع $y = x^3 + x^2 + x + 1$ را دریافت و منحنی آن را رسم کنید.

حل: ابتدا از تابع، مشتق گرفته، بعد مشتق آنرا مساوی به صفر قرار می‌دهیم:

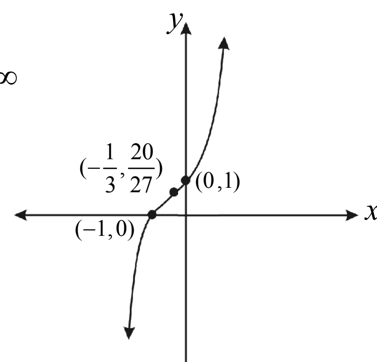
$$y' = 3x^2 + 2x + 1$$
$$y' = 0$$
$$3x^2 + 2x + 1 = 0 \quad , \quad a = 3 \ , \ b = 2 \ , \ c = 1$$
$$\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4(3)(1) = 4 - 12 = -8 < 0$$

چون $\Delta < 0$ و $a > 0$ است؛ بنابر آن $y' = 3x^2 + 2x + 1 > 0$ می‌باشد و تابع همیشه متزاید است.

حال برای دریافت مقعریت تابع، مشتق دوم را به دست می‌آوریم:

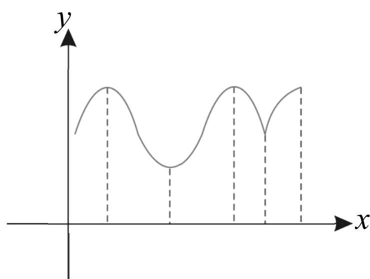
$$y'' = 6x + 2$$
$$y'' = 0$$
$$6x + 2 = 0 \quad , \quad 6x = -2 \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{1}{3}$$
$$f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$$
$$f(-\frac{1}{3}) = (-\frac{1}{3})^3 + (-\frac{1}{3})^2 + (-\frac{1}{3}) + 1$$
$$= -\frac{1}{27} + \frac{1}{9} - \frac{1}{3} + 1 = \frac{-1 + 3 - 9 + 27}{27} = \frac{20}{27}$$
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \qquad , \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	$+\infty$
y'	$+$		$+$
y''	$-$	0	$+$
y	$-$ $\cap$	$\frac{20}{27}$	$+$ $\cup$



برای ترسیم دقیق گراف تابع، قیمت $f(0)$ و $f(-1)$ را به دست می‌آوریم:

$$f(0) = 0^3 + 0^2 + 0 + 1 = 1 \rightarrow (0,1) \in f$$
$$f(-1) = (-1)^3 + (-1)^2 + (-1) + 1 = 0 \rightarrow (-1,0) \in f$$



فصل سوم

عنوان درس: تطبیق نقاط بحرانی

صفحهٔ کتاب (125)

وقت: ساعت دوم درسی

اهداف آموزشی **- دانشی** **- مهارتی** **- ذهنیتی**	- شاگردان مفهوم تعیین نقاط بحرانی را بدانند. - شاگردان نقاط بحرانی را تعیین کرده بتوانند. - شاگردان از تعیین و تشخیص نقـاط بحرانـی احساس خوشـی نمـوده و در مسایل حیات روزمره آنرا به کار ببرند.
روش های تدریس	سؤال و جواب، کار گروهی و انفرادی...
مواد ممد درسی	چارت شکل ورودی
توضیح ورودی **(5) دقیقه**	بعد از انجام کارهای مقدماتی تدریس که بعد از داخل شـدن بـه صـنف ضـروری اسـت بـه توضیح بخش درس ورودی یکبار دیگر بپردازیـد چـارت تهیـه شـدهٔ شـکل ورودی را بـار دیگر پیش روی صنف آویزان کنید و توضیحاتی که در ساعت اول درسی درمـورد بخـش ورودی داشتید دوباره تکرار نمایید.

فعالیت جریان درس: (28) دقیقه

شاگردان را به گروه های مناسب تقسیم نموده به هر گروه وظیفه دهید که سؤال شماره(5) صفحهٔ(126) کتاب درسـی را حل نمایند، در جریان کار گروهی از گروه ها نظارت نمایید تا در حل سؤال تمام شـاگردان سـهم داشـته باشـند. در اجرای کار گروهی اعضای هر گروه باید باهم مشوره نموده، فعالیت را انجام دهند تا به هر شاگرد موقـع آن میسر شـود تا در حل سؤال سهم بگیرند و نظر خویش را ابراز بدارند. در ختم فعالیت از نمایندهٔ گروه ها بخواهید تـا فعـالیتی را کـه انجام داده اند به سایر شاگردان توضیح دهند.

تحکیم درس: (7) دقیقه

برای اینکه شاگردان درس جدید را خوبتر فراگیرند سؤال شماره(6) را روی تخته بنویسید و آنرا حل کنید؛ طوریکه شاگردان در حل سؤال سهم فعال داشته باشند.

ارزیابی ختم درس: (5) دقیقه

برای اینکه مطمئن شوید آیا شاگردان درس جدید را فراگرفته اند یا خیر؟ ارزیابی کنید، برای این منظور سؤال ذیل را مطرح کرده و از شاگردان جواب اخذ نمایید.

یک باغ شکل مستطیلی دارد، اگر محیط آن $400m$ باشد مساحت اعظمی آن چند است دریافت کنید؟

جواب به سؤال های تمرین

2- دوعدد را طوری به دست آرید که حاصل جمع آنها 20 و حاصل ضرب آنها بزرگترین قیمت ممکنه را داشته باشد.

حل: هرگاه اعداد را به x و y و حاصل ضرب آنها را به P نشان دهیم؛ پس داریم:

$$P = x \cdot y \ \ldots \ \mathrm{I}$$
$$x + y = 20 \ \Rightarrow \ y = 20 - x$$

قیمت y را در معادلهٔ I وضع می‌کنیم:

$$P = x(20 - x) = 20x - x^2 \ \ldots \ \mathrm{II}$$

دیده می‌شود که حاصل ضرب P، تابع متحول x می‌باشد.

حال مطالعه می‌کنیم که تابع به کدام x قیمت اعظمی را به خود می‌گیرد و همچنان می‌دانیم که در نقطهٔ اعظمی مشتق تابع صفر است؛ یعنی:

$$P' = 20 - 2x = 2(10 - x) = 0$$
$$10 - x = 0 \ \Rightarrow \ x = 10$$

حال قیمت x را در معادلهٔ II وضع می‌کنیم:

$$P = 10(20 - 10) = 10 \cdot 10 = 100$$

نظر به سؤال x و y باید هر دو مثبت باشد؛ یعنی:

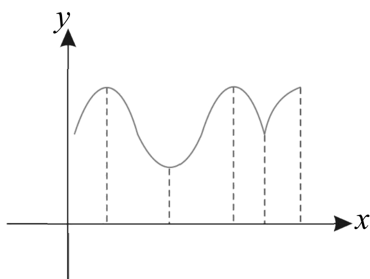
$$x > 0$$
$$y = 20 - x > 0 \ \Rightarrow \ x < 20$$

پس می‌توانیم تابع P را در انتروال $[0, 20]$ در نظر بگیریم:

$$P(0) = 0(20 - 0) = 0$$
$$P(20) = 20(20 - 20) = 0$$

پس P در همان نقطهٔ $x = 10$ قیمت اعظمی 100 را دارد.

$$y = 20 - x = 20 - 10 = 10$$
$$x + y = 10 + 10 = 20$$
$$x, y = 100$$



فصل سوم

عنوان درس: تطبیق نقاط بحرانی

صفحهٔ کتاب (125)

وقت: ساعت سوم درسی

اهداف آموزشی **- دانشی** **- مهارتی** **- ذهنیتی**	- شاگردان مفهوم تعیین نقاط بحرانی را بدانند. - شاگردان نقاط بحرانی را تعیین کرده بتوانند. - شاگردان به تعیین نقاط بحرانی علاقه‌مندی پیدا نمایند.
روش های تدریس	سؤال و جواب، کار گروهی و انفرادی...
مواد ممد درسی	چارت شکل ورودی
توضیح ورودی **(5) دقیقه**	نخست کارهای مقدماتی تدریس که بعد از داخل شدن به صنف اجرای آن برای هر معلم ضروری است انجام دهید؛ سپس چارت شکل ورودی را پیش روی صنف آویزان نموده آن‌را یکبار دیگر طور مختصر توضیح کنید تا بخش ورودی کاملاً برای شاگردان واضح گردد.

فعالیت جریان درس: (28) دقیقه

شاگردان را به گروه های مناسب تقسیم نموده به هر گروه وظیفه دهید تا اعضای هر گروه بعد از مشوره با یکدیگر سؤال شماره(7) صفحهٔ(127) کتاب درسی را حل نمایند. در جریان کار از تمام گروه ها نظارت کنید تا تمام شاگردان در حل سؤال فعالانه سهم داشته باشند. اگر در اجرای کار گروهی به مشکلی رو به رومی شوند آنها را رهنمایی کنید. درختم کار گروهی از نمایندهٔ یک گروه بخواهید تا فعالیتی را که انجام داده اند به دیگران توضیح کند.

سؤال شماره(8) صفحهٔ(128) کتاب درسی را روی تخته بنویسید و از یک شاگرد داوطلب بخواهید تا آنرا روی تخته حل کند. همزمان ازسایر شاگردان بخواهید تا سؤال مذکور را به شکل انفرادی به کتابچه های شان حل کنند. اگر درحل سؤال روی تخته اشتباهی وجود داشت از یک شاگرد دیگر بخواهید تا آنرا اصلاح نماید. زمانیکه مطمئن شدید که حل سؤال روی تخته کاملاً درست است از سایر شاگردان بخواهید تا سؤال حل شدهٔ کتابچه‌های شان را با سؤال حل شدهٔ روی تخته مقایسه کنند.

تحکیم درس: (7) دقیقه

برای اینکه شاگردان مفهوم درس ارائه شده را خوبتر درک کنند سؤال3 تمرین صفحهٔ(128) کتاب درسی را روی تخته بنویسید و آنرا حل کنید؛ طوریکه شاگردان سهم فعال داشته باشند، به این معنی که درجریان حل سؤال از شاگردان سؤال کنید و جواب های قناعت بخش به دست آرید تا شاگردان خود را درحل سؤال سهیم بدانند.

ارزیابی ختم درس: (5) دقیقه

برای اینکه اطمینان حاصل کنیدکه آیا شاگردان درس جدید را فرا گرفته اند یا خیر؟ ارزیابی کنید.

مثلاً بپرسید:

- حجم مکعب مستطیل مربع القاعده را توسط کدام رابطه میتوان دریافت نمود؟

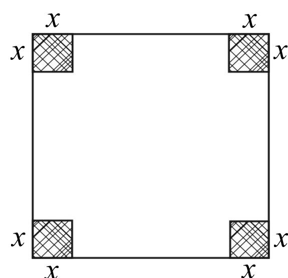
- مکعب مستطیل مربع القاعده که ضلع قاعده آن a و ارتفاع آن b باشد و مجموع سه بعدآن d باشد درینصورت ارتفاع b را از جنس a و d توسط کدام رابطه میتوانید نشان داد؟

جواب به سؤال های تمرین

3- از یک تخته آهن چادر مربعی که هر ضلع آن $1m$ طول دارد یک بکس سرباز ساخته می شود از چهار کنج آن چهار مربع مساوی خورد ببرید وبعد آنرا قات کنید مربع های خورد به کدام اندازه بریده شود تا بکس مذکور حجم اعظمی ممکن را داشته باشد.

حل: هرگاه ضلع مربع‌های که قطع می‌شوند به x نشان دهیم، قاعدهٔ بکس عبارت خواهند بود از $(1-2x)^2$ و ارتفاع آن عبارت از xاست و حجم V آن عبارت است از:

$$\begin{aligned} V &= (1-2x)^2 \cdot x \\ &= (1-4x+4x^2)\cdot x \\ &= x-4x^2+4x^3 \end{aligned}$$



از شکل دیده می‌شود: $2x<1$ یا $x<\frac{1}{2}$ از طرف دیگر $x>0$ است؛ لذا کفایت می‌کند که تابع V در انتراول بستهٔ $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ در نظر بگیریم، حال می‌دانیم که در نقاط اعظمی V مشتق آن V' صفر است:

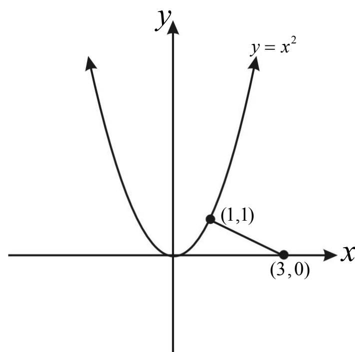
$$V = x-4x^2+4x^3$$
$$V' = 1-8x+12x^2 = 0$$
$$(6x-1)(2x-1) = 0$$
$$6x-1=0 \Rightarrow 6x=1 \quad , \quad x=\frac{1}{6}$$
$$2x-1=0 \Rightarrow 2x=1 \quad , \quad x=\frac{1}{2}$$

نقاط صفری این معادله عبارت از $x=\frac{1}{2}$ و $x=\frac{1}{6}$ است که نقاط اعظمی نیز اند.

$$x=0 \quad , \quad V=0$$
$$x=\frac{1}{6} \quad , \quad V=\frac{2}{27}$$
$$x=\frac{1}{2} \quad , \quad V=0$$

لذا برای $x=\frac{1}{6}$ حجم بکس مذکور اعظمی ممکنه را دارد.

4- نزدیکترین نقطه گراف $y = x^2$ را به نقطه $A(3,0)$ دریافت کنید.



حل: برای هر x نقطهٔ $P(x, x^2)$ بالای گراف تابع داده شده قرار دارد؛ مانند شکل از هندسهٔ تحلیلی می‌دانیم که مسافه بین نقاط A و P از مساوات ذیل به دست می‌آید:

$$|PA|^2 = (x-3)^2 + (x^2-0)^2 = x^2 - 6x + 9 + x^4$$

اگر $|PA| = f(x)$ وضع کنیم؛ داریم که: $f(x) = \sqrt{x^4 + x^2 - 6x + 9}$

حال نقاط x را جستجو می‌کنیم که $f(x)$ کوچکترین قیمت را داشته باشد و چون باید $f(x) \geq 0$ باشد، انتروال $[0, \infty)$ را در نظر می‌گیریم. برای دریافت نقاط اصغری نقاط صفری مشتق $f(x)$ را پیدا می‌کنیم:

$$f'(x) = \frac{4x^3 + 2x - 6}{2 \cdot \sqrt{x^4 + x^2 - 6x + 9}}$$

$f'(x) = 0$ است، اگر $4x^3 + 2x - 6 = 0$ باشد، واضح است که یک جذر این معادله 1 است:

$$4 \cdot 1^3 + 2 \cdot 1 - 6 = 6 - 6 = 0$$

برای معلوم نمودن این مطلب معادلهٔ $4x^3 + 2x - 6$ را توسط تقسیم ترکیبی به $x - 1$ تقسیم می‌کنیم:

$$\begin{array}{cccc|c} 4 & 0 & 2 & -6 & 1 \\ \downarrow & 4 & 4 & 6 & \\ \hline 4 & 4 & 6 & 0 & \end{array}$$

لذا: $4x^3 + 2x - 6 = (x-1)(4x^2 + 4x + 6) = 0$

چون قاسمهٔ (Δ) معادلهٔ $4x^2 + 4x + 6$ منفی است؛ پس جذر حقیقی ندارد.

$$\begin{aligned} \Delta = b^2 - 4ac &= 4 - 4 \cdot 4(6) \\ &= 4 - 16(6) \\ &= 4 - 96 = -92 \end{aligned}$$

لذا یگانه نقطهٔ صفری $f'(x) = 0$ عبارت از $x = 1$ است؛ چون:

$$f(0) = \sqrt{0^4 + 0^2 - 6 \cdot 0 + 9} = \sqrt{9} = 3$$

$$f(1) = \sqrt{1 + 1 - 6 + 9} = \sqrt{5} < 3$$

$f(1)$ کوچکترین فاصله بین گراف تابع و نقطهٔ $A(3,0)$ می‌باشد حال قیمت $x = 1$ را در معادلهٔ $y = x^2$ وضع می‌کنیم $y = 1$ می‌شود؛ لذا نقطهٔ $P(1,1)$ تابع داده شده نزدیکترین نقطه به $A(3,0)$ است.

فصل سوم

عنوان درس: نکات مهم فصل

صفحۀ کتاب (129)

اهداف آموزشی **-دانشی** **- مهارتی** **- ذهنیتی**	- شاگردان نکات مهم فصل سوم را بدانند. - شاگردان نکات مهم این فصل را توضیح کرده بتوانند. - شاگردان از بیان نکات مهم این فصل احساس خوشی نمایند.
روش های تدریس	سؤال وجواب ، کار انفرادی
مواد ممد درسی	چارت تمام عناوین نکات مهم فصل سوم
توضیح ورودی **(5) دقیقه**	بعد از انجام کار های مقدماتی تدریس که بعد از داخل شدن به صنف ضروری است به ارائۀ نکات مهم فصل بپردازید. چارتی را از قبل تهیه نموده اید آنرا پیش‌روی صنف آویزان نمایید؛ سپس توجه شاگردان را به نکات مهم این فصل معطوف داشته و اهمیت آنرا به آنها بیان دارید، تا آنها به اهمیت آن پی برده و علاقه به یادگیری بهتر آن از خود نشان دهند و نکات مهم را خوب فرا گیرند.

فعالیت جریان درس (28)دقیقه

از شاگردان بخواهید تا به نوبت به پیش روی تخته بیایند و یک یک عنوان را از روی چارت بخوانند، بعد در مورد توضیحات بدهند و در اخیر رابطۀ آنرا به روی تخته بنویسند.

این کار را تا وقتی ادامه دهید که همۀ نکات مهم فصل توسط شاگردان واضح گردد. اگر در اثنای توضیحات شاگردان به کدام مشکلی رو به رو می شوند، شما خود آنرا به روی تخته یادداشت و در اخیر آنرا توضیح نمایید طوریکه شاگردان در هنگام توضیح سهم فعال داشته باشند.

تحکیم درس (5) دقیقه

به منظور اینکه شاگردان به اهمیت نکات مهم فصل خوبتر پی ببرند، هر یک از نکات مهم این فصل را که در اثنای توضیح آن شاگردان به آن مشکل داشتند شما آنرا توضیح دهید که تمام مشکلات آنها حل گردد و در درس های آینده کدام سؤالی نداشته باشند.

ارزیابی ختم درس (5) دقیقه

برای اینکه مطمئن شوید که آیا شاگردان به اهمیت نکات مهم این فصل پی برده اند یاخیر؟ با طرح چند سؤال به شکل خلاصه درس را ارزیابی کنید؛ طور مثال سؤال کنید:

- برای ترسیم گراف یک تابع کدام مراحل باید در نظر گرفته شود؟
- نقاط بحرانی یعنی چه؟

- چه وقت یک تابع را اعظمی مطلق گویند؟
- قاعدهٔ هوپیتال برای ما چی را بیان می‌کند؟

حل تمرینان عمومی فصل سوم

1- اگر یک تابع در انتروال $[a,b]$ متمادی و مشتق پذیر باشد این تابع وقتی متزاید است که:

حل: $c)\ \ f'(x) > 0$

2- در یک تابع بلندترین نقطه را:

حل: $c)$ اعظمی(Maximum)می‌گویند

3- نقاط بحرانی تابع $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+2x}$ عبارت است از:

حل: $d)$ ندارد

4 – آن نقطهٔ که تابع خود را از محدبیت به مقعریت تبدیل می‌کندو مماس داشته باشد مشتق دوم آن صفر باشد:

حل: $b)$ نقطه انعطاف

5- ساحهٔ تعریف تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ عبارت است از:

حل: $a)\ (-\infty\,,+\infty)$

6- مجانب عمودی تابع $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+2}$ عبارت است از:

حل: $d)\ \ x = -2$

7- مجانب عمودی توابع هوموگرافیک عبارت است از:

حل: $b)\ \ x = -\dfrac{d}{c}$

8- مجانب افقی تابع $g = \dfrac{4x^2 - 6x}{x^2 - 4}$ عبارت است از:

حل: $a)\ 4$

9- از روابط ذیل کدام آنها درست است:

حل: $a)\ \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

سؤالات ذیل را حل نمایید

1. میل منحنی تابع $f(x) = x^2 - x$ را در نقطهٔ $P(3,0)$ تعیین کنید.

حل: خارج قسمت نیوتن را تشکیل و در نقطهٔ $x = 3$ میل منحنی را محاسبه می‌نماییم:

$$m_T = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(3+h)^2-(3+h)-(3^2-3)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{9+6h+h^2-3-h-9+3}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{6h+h^2-h}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{5h+h^2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h(5+h)}{h} = \lim_{h\to 0}5+h = 5$$

2. در تابع $f(x)=-x^2$ تغییرات متوسط را در انتروال $[3,4]$ پیدا کنید.

حل: از اینکه $x_1=3$ و $x_2=4$ است؛ پس نظر به تعریف داریم که:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{f(4)-f(3)}{4-3}=\frac{-16-(9)}{4-3}=-16-9=-25$$

$$f(4)=-4^2=-16$$

$$f(3)=-9$$

3. با استفاده از خارج قسمت نیوتن مشتق توابع ذیل را دریابید:

1) $f(x)=2x$ 2) $f(x)=3x^2-1$ 3) $f(x)=\sqrt{2}x$

حل1: با استفاده از خارج قسمت نیوتن می‌توانیم بنویسیم که:

$$f(x)=2x$$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2(x+h)-2x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2x+2h-2x}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2h}{h}\quad\Rightarrow\quad f'(x)=2$$

حل2:

$$f(x)=3x^2-1$$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{3(x+h)^2-1-(3x^2-1)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{3(x^2+2xh+h^2)-1-3x^2+1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{3x^2+6xh+3h^2-1-3x^2+1}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{6xh+3h^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h(6x+3h)}{h}=\lim_{h\to 0}(6x+3h)=6x$$

حل3:

$$f(x)=\sqrt{2}x$$

$$f'(x)=-\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{2}(x+h)-\sqrt{2}x}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{2}x+\sqrt{2}h-\sqrt{2}x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{2}h}{h}=\sqrt{2}$$

4. در نقاط داده شده مشتق توابع ذیل را پیدا کنید:

1) $f(x)=2x-1$, $x_0=-1$ 2) $f(x)=x^2$, $x_0=2$

حل 1):

$$f(x)=2x-1 \quad , \quad x_0=-1$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\frac{2(x_0+\Delta x)-1-(2x_0-1)}{\Delta x}=\frac{2x_0+2\Delta x-1-2x_0+1}{\Delta x}$$

$$=\frac{2\Delta x}{\Delta x}=2$$

از اینجا نتیجه گرفته می‌شود که 2 یک عددثابت بوده، مشتق و در نقطهٔ $x_0=-1$ هیچ موجود نیست.

حل 2): مشتق عدد ثابت صفر است.

$$f(x)=x^2 \quad , \quad x_0=2$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\frac{(x_0+\Delta x)^2-{x_0}^2}{\Delta x}=\frac{x_0^2+2x_0\Delta x+(\Delta x)^2-x_0^2}{\Delta x}$$

$$=\frac{2x_0\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}=\frac{\Delta x(2x_0+\Delta x)}{\Delta x}=2x_0+\Delta x$$

حالا از روش پیدا کردن لیمیت استفاده می کنیم:

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(2x_0+\Delta x)=2x_0$$

چون $x_0=2$ است؛ پس داریم که: $f'(x_0)=f(2)=2(2)=4$

5. تابع مشتق توابع ذیل را دریابید:

1) $f(x)=2x-4x^2$ 2) $f(x)=3x^3-1$

حل 1: ابتدا مشتق تابع را می‌یابیم:

$$f(x)=2x-4x^2$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\frac{2(x_0+\Delta x)-4(x_0+\Delta x)^2-(2x_0-4x_0^2)}{\Delta x}$$

$$=\frac{2x_0+2\Delta x-4\left[x_0^2+2x_0\Delta x+(\Delta x)^2\right]-2x_0+4x_0^2}{\Delta x}$$

$$=\frac{2x_0+2\Delta x-4x_0^2-8x_0\Delta x-4(\Delta x)^2-2x_0+4x_0^2}{\Delta x}$$

$$=\frac{2\Delta x-8x_0\Delta x-4(\Delta x)^2}{\Delta x}=\frac{\Delta x(2-8x_0-4\Delta x)}{\Delta x}$$

$$=2-8x_0-4\Delta x$$

اکنون لیمیت را دریافت می کنیم:

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(2-8x_0-4\Delta x)=2-8x_0$$

پس مشتق تابع $f(x)$ در نقطهٔ x_0 مساوی به $f'(x_0)=2-8x_0$ و تابع مشتق آن $f'(x)=2-8x$ است.

حل2:

$$f(x)=3x^3-1$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\frac{3(x_0+\Delta x)^3-1-(3x_0^3-1)}{\Delta x}$$

$$=\frac{3\left[x_0^3+3x_0^2\Delta x+3x_0(\Delta x)^2+(\Delta x)^3\right]-1-3x_0{}^3+1}{\Delta x}$$

$$=\frac{3x_0^3+9x_0^2\Delta x+9x_0(\Delta x)^2+3(\Delta x)^3-1-3x_0^3+1}{\Delta x}$$

$$=\frac{9x_0^2\Delta x+9x_0(\Delta x)^2+3(\Delta x)^3}{\Delta x}=\frac{\Delta x\left[9x_0{}^2+9x_0\Delta x+3(\Delta x)^2\right]}{\Delta x}=9x_0^2+9x_0\Delta x+3(\Delta x)^2$$

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left[9x_0^2\Delta x+3(\Delta x)^2\right]=9x_0^2$$

پس مشتق تابع $f(x)$ در نقطهٔ x_0 مساوی به $f'(x_0)=9x_0^2$ و تابع مشتق آن $f'(x)=9x^2$ است.

6. در نقاط داده شده مشتق توابع ذیل را دریابید:

1) $f(x)=7x^2-3x \quad , \quad x_0=-1$

2) $f(x)=6x^2-2x-1 \quad , \quad x_0=\frac{1}{2}$

حل1:

$$f(x)=7x^2-3x \quad , \quad x_0=-1$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\frac{7(x_0+\Delta x)^2-3(x_0+\Delta x)-(7x_0^2-3x_0)}{\Delta x}$$

$$=\frac{7\left[x_0^2+2x_0\Delta x+(\Delta x)^2\right]-3x_0-3\Delta x-7x_0^2+3x_0}{\Delta x}$$

$$=\frac{7x_0^2+14x_0\Delta x+7(\Delta x)^2-3x_0-3\Delta x-7x_0^2+3x_0}{\Delta x}$$

$$=\frac{14x_0\Delta x+7(\Delta x)^2-3\Delta x}{\Delta x}=\frac{\Delta x(14x_0+7\Delta x-3)}{\Delta x}=14x_0+7\Delta x-3$$

حالا از روش پیدا کردن لیمیت استفاده می‌کنیم:

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(14x_0+7\Delta x-3)=14x_0-3$$

چون $x_0=-1$ است؛ بنا برین داریم: $f'(x_0)=f'(-1)=14(-1)-3=-14-3=-17$

حل2:

$$f(x) = 6x^2 - 2x - 1 \quad , \quad x_0 = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{6(x_0 + \Delta x)^2 - 2(x_0 + \Delta x) - 1 - (6x_0^2 - 2x_0 - 1)}{\Delta x}$$

$$= \frac{6\left[x_0^2 + 2x_0 \cdot \Delta x + (\Delta x)^2\right] - 2x_0 - 2\Delta x - 1 - 6x_0^2 + 2x_0 + 1}{\Delta x}$$

$$= \frac{6x_0^2 + 12x_0\Delta x + 6(\Delta x)^2 - 2x_0 - 2\Delta x - 1 - 6x_0^2 + 2x_0 + 1}{\Delta x}$$

$$= \frac{12x_0\Delta x + 6(\Delta x)^2 - 2\Delta x}{\Delta x} = \frac{\Delta x(12x_0 + 6\Delta x - 2)}{\Delta x} = 12x_0 + 6\Delta x - 2$$

اکنون از روش پیدا کردن لیمیت استفاده می کنیم:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}(12x_0 + 6\Delta x - 2) = 12x_0 - 2$$

حال قیمت $x_0 = \frac{1}{2}$ را در رابطهٔ $f'(x) = 12x_0 - 2$ وضع می کنیم:

$$f'(x_0) = f'(\frac{1}{2}) = 12(\frac{1}{2}) - 2 = 6 - 2 = 4$$

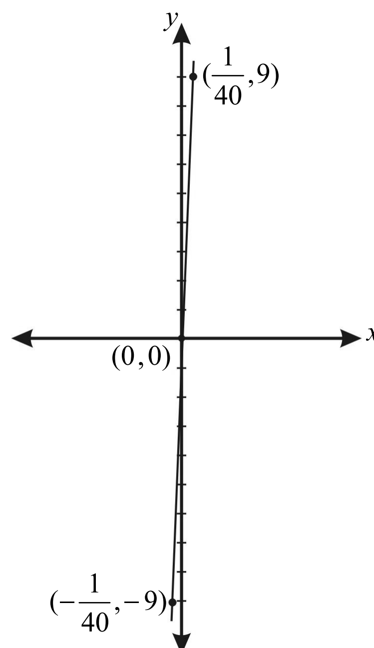
7. از تابع $f(x) = 3x^5 - 4x^2 - 3x$ چهار مرتبه مشتق گرفته و گراف آن را رسم نمایید.

حل:

$$f(x) = 3x^5 - 4x^2 - 3x$$
$$f'(x) = 15x^4 - 8x - 3$$
$$f''(x) = 60x^3 - 8$$
$$f'''(x) = 180x^2$$
$$f^4(x) = 360x$$

x	0	$\frac{1}{40}$	$-\frac{1}{40}$
$y^{(4)}$	0	9	-9

$$\frac{1}{40} = 0.020$$



8. مشتق ضمنی تابع $x^2y+6y^3=x-3$ را دریابید.

حل:

$$x^2y+6y^3-x+3=0$$
$$f'_{(x)}=2xy-1$$
$$f'_{(y)}=x^2+18y^2$$
$$y'_{(x)}=-\frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}}=-\frac{2xy-1}{x^2+18y^2}=\frac{1-2xy}{x^2+18y^2}$$

9. مشتق توابع ذیل را دریابید.

1) $f(x)=x^3\sec x$ 2) $f(x)=\sin(3x-1)$ 3) $f(x)=\cos^2 2x$

حل:

1) $f(x)=x^3\sec x$

$$f'(x)=(x^3)'\cdot\sec x+x^3\cdot(\sec x)'=3x^2\cdot\sec x+x^3\cdot\sec x\cdot\tan x$$

2) $f(x)=\sin(3x-1)$

$$f'(x)=[\sin(3x-1)]'=\cos(3x-1)\cdot(3x-1)'=\cos(3x-1)\cdot 3=3\cos(3x-1)$$

3) $f(x)=\cos^2 2x$

$$f'(x)=(\cos^2 2x)'=2\cos 2x\cdot[\cos(2x)]'=2\cos 2x\cdot(-\sin 2x)\cdot 2=-4\cos 2x\cdot\sin 2x$$

10. کدام عدد مثبت است که با معکوس آن جمع گردد حاصل جمع آن ها از همه کوچکتر شود؟

حل: فرض می‌کنیم عدد مثبت x باشد، معکوس آن $\frac{1}{x}$ می‌باشد، اگر حاصل جمع آنها را P بنامیم خواهیم داشت: $P=x+\frac{1}{x}$

مشتق تابع را می گیریم:

$$P'=1+\frac{1'\cdot x-1\cdot x'}{x^2}$$
$$P'=1-\frac{1}{x^2}$$

مشتق را مساوی به صفر قرار می‌دهیم:

$$1-\frac{1}{x^2}=0$$
$$\frac{x^2-1}{x^2}=0$$

مساوات فوق و قتی صفر است که صورت آن صفر باشد؛ یعنی:

$$x^2-1=0 \;\Rightarrow\; x^2=1 \quad , \quad x=1$$

پس کوچکترین عدد مثبت 1 می‌باشد، اگر با معکوس خود که $\frac{1}{1}$ یا 1 است جمع شود کوچکترین حاصل جمع‌را می‌دهد.

11. گراف تابع $f(x)=\frac{x^2+1}{x}$ را رسم کنید.

حل:

1- برای $x=0$ تابع $f(x)$ تعریف نشده است؛ پس تابع با محور y نقطهٔ تقاطع ندارد.

2- $f(x)=0 \;,\; x^2+1=0 \;\Rightarrow\; x^2=-1$ میدانیم که عدد حقیقی وجود ندارد که مربع آن -1 شود؛ پس $f(x)$ صفر شده نمی‌تواند و تابع با محور x هم نقطهٔ تقاطع ندارد.

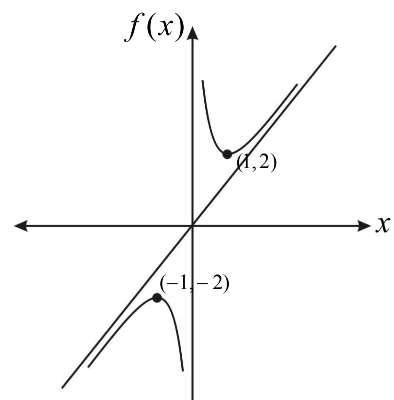
3- اکنون نقاط بحرانی تابع را به دست می‌آوریم:

$$f'(x)=\frac{2x\cdot x-(x^2+1)}{x^2}=\frac{2x^2-x^2-1}{x^2}=\frac{x^2-1}{x^2}$$
$$\Rightarrow\; x^2-1=(x+1)(x-1)=0 \qquad x=1 \quad , \quad x=-1$$

از اینجا نتیجه گرفته می‌شود که:

$$f''(x)=\frac{(x^2-1)'\cdot x^2-(x^2)'\cdot(x^2-1)}{(x^2)^2}=\frac{2x\cdot x^2-2x(x^2-1)}{x^4}$$
$$=\frac{2x^3-2x^3+2x}{x^4}=\frac{2x}{x^4}=\frac{2}{x^3}$$

x	$-\infty$		-1		‖		1		$+\infty$
$x+1$	$-$	$-$	0	$+$	‖	$+$		$+$	$+$
$x-1$	$-$			$-$	‖	$-$	0	$+$	$+$
$f'(x)$	$+$	$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	$+$
$f(x)$	$-\infty$	↗	-2	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	2	↗	$+\infty$



حال قیمت را وضع می‌کنیم:

$$f''(x)=\frac{2}{x^3}$$
$$f''(-1)=-2<0$$
$$f''(1)=2>0$$

پس نقطهٔ $(-1,f(-1))$ نقطهٔ اعظمی و نقطهٔ $(1,f(1))$ نقطهٔ اصغری تابع می‌باشد.

12. گراف تابع $f(x)=\dfrac{4x^2}{x^2+1}$ را رسم کنید.

حل:

a. نقطهٔ تقاطع با محور y $(0,0)$ است: $x=0 \quad , \quad f(0)=0$

b. نقطهٔ تقاطع با محور x: $f(x)=0 \quad , \quad 4x^2=0 \;\Rightarrow\; x=0$

c. برای دریافت نقاط اعظمی و اصغری مشتق اول و دوم تابع را مطالعه می‌نماییم:

$$f(x)=\frac{4x^2}{x^2+1}$$

$$f'(x)=\frac{(4x^2)'\cdot(x^2+1)-(x^2+1)'\cdot 4x^2}{(x^2+1)^2}=\frac{8x(x^2+1)-2x(4x^2)}{(x^2+1)^2}$$

$$=\frac{8x^3+8x-8x^3}{(x^2+1)^2}=\frac{8x}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(x)=0 \;,\; 8x=0 \;\Rightarrow\; x=0$$

پس $(0,f(0))=(0,0)$ نقطهٔ اعظمی یا اصغری است.

d. برای تشخیص نقطهٔ اعظمی یا اصغری داریم که:

$$f''(x)=\frac{(8x)'\cdot(x^2+1)^2-[(x^2+1)^2]'\cdot 8x}{\left[(x^2+1)^2\right]^2}=\frac{8(x^2+1)^2-2(x^2+1)\cdot 2x\cdot 8x}{(x^2+1)^4}$$

$$=\frac{8(x^2+1)^2-32x^2(x^2+1)}{(x^2+1)^4}=\frac{8(x^2+1)\left[x^2+1-4x^2\right]}{(x^2+1)^4}=\frac{8x^2+8-32x^2}{(x^2+1)^3}$$

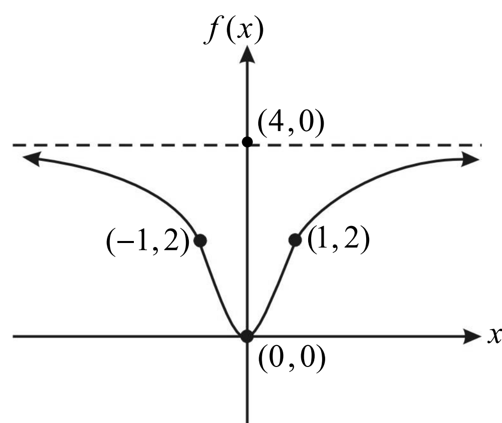
$$=\frac{-24x^2+8}{(x^2+1)^3} \quad\Rightarrow\quad f''(0)=8>0$$

پس $(0,0)$ نقطهٔ اصغری تابع است.

e.

- مجانب عمودی ندارد؛ برای هر x از اعداد حقیقی تابع طوری زیر تعریف شده است.
- $y=4$ مجانب افقی است؛ یعنی $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{4x^2}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{4}{1+\frac{1}{x^2}}=4$
- مجانب مایل ندارد؛ زیرا که درجهٔ صورت و مخرج باهم مساوی است.

f. گراف و جدول:



x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$f(x)$	$4 \searrow$		$0 \nearrow$		

گراف تابع مثلثاتی $y=\sin x$ را رسم کنید.

حل:

$$y=\sin x \quad \Rightarrow \quad f(x)=\sin x$$
$$x=0 \quad , \quad f(0)=\sin 0^0 = 0$$

a. نقطهٔ تقاطع تابع با محور y مساوی به $(0,0)$ است.

b. $\sin x = 0$ ، $f(x)=0$

نقاط تقاطع تابع با محور x مساوی است به $n=0\ ,\ \pi\ ,2\pi\ ,\ ...$ می‌باشد.

c. مشتق تابع داده شده را به دست آورده و آنرا مساوی به صفر قرار می‌دهیم تا نقاط اعظمی و اصغری تابع حاصل گردد:

$$y=\sin x$$
$$y'=\cos x$$
$$y'=0 \ \Rightarrow \ \cos x = 0\ , \quad x=\frac{\pi}{2}\ , \quad x=\frac{3\pi}{2}$$
$$y(\frac{\pi}{2})=\sin\frac{\pi}{2}=1 \ \Rightarrow \ P(\frac{\pi}{2},1)$$ نقطهٔ اعظمی
$$y(\frac{3\pi}{2})=\sin\frac{3\pi}{2}=-1 \ \Rightarrow \ P(\frac{3\pi}{2},-1)$$ اصغری

برای دریافت نقاط انعطاف داریم که:

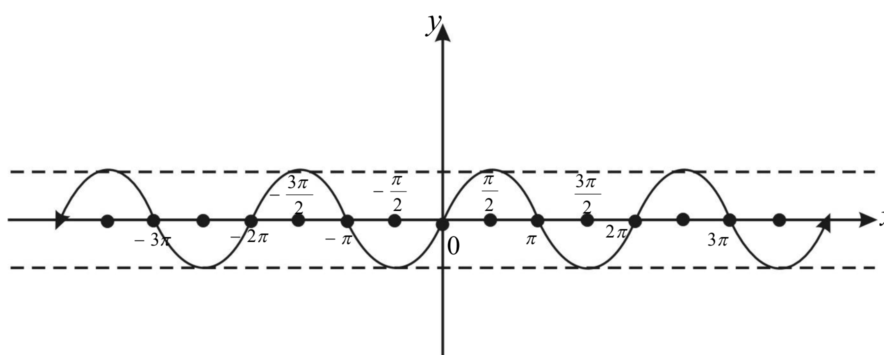
$$y' = \cos x$$
$$y'' = -\sin x$$
$$y'' = 0 \;\Rightarrow\; -\sin x = 0 \;,\quad x = 0 \;,\quad x = \pi \;,\quad x = 2\pi$$
$$y_{(0)} = \sin 0 = 0 \;\Rightarrow\; I_1 = (0,0)$$
$$y_{(\pi)} = \sin \pi = 0 \;\Rightarrow\; I_2 = (\pi, 0)$$
$$y_{(2\pi)} = \sin 2\pi = 0 \;\Rightarrow\; I_3 = (2\pi, 0)$$

پس تابع $y = \sin x$ در انتروال $0 \le x \le 2\pi$، یک نقطهٔ انعطاف یک نقطهٔ اصغری و یک نقطهٔ اعظمی دارد.

d. تابع $y = \sin x$ مجانب ندارد.

e. برای تعیین ساحهٔ تزاید و تناقص تابع جدول را تشکیل؛ سپس گراف آنرا ترسیم می‌کنیم:

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
y	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0



13. گراف تابع مثلثاتی $y = \tan x$ را رسم کنید.

حل:

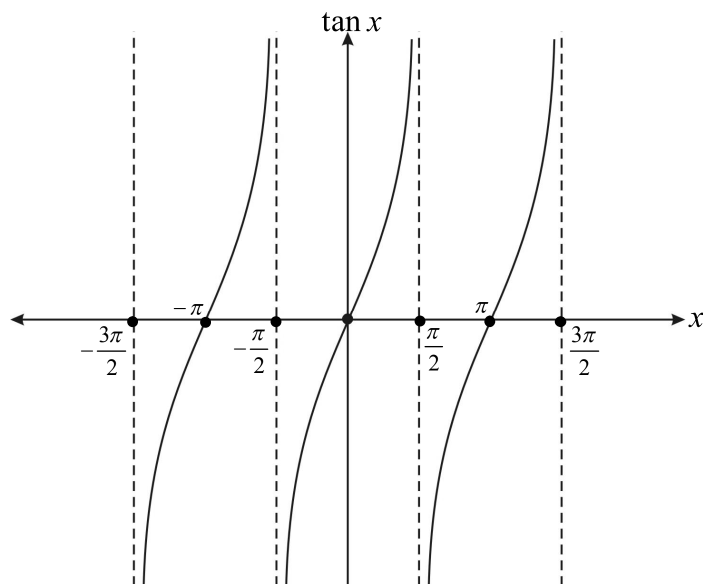
$$y = \tan x \;\Rightarrow\; f(x) = \tan x$$
$$x = 0 \;,\quad f(0) = \tan 0 = 0$$

a. نقطهٔ تقاطع با محور y عبارت است از: $(0,0)$

b. $f(x) = 0 \;,\quad \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = 0 \;\Rightarrow\; \sin x = 0$

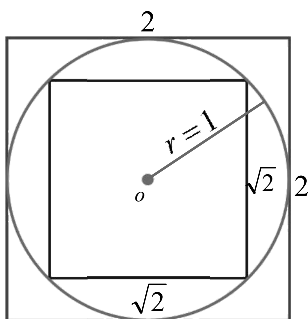
نقاط تقاطع تابع با محور x عبارت است از:... $n = 0, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$

c. تابع $y = \tan x$ در انتروال $-\infty < x < +\infty$ همیشه متزاید می‌باشد؛ بنابرین نقطهٔ اعظمی و اصغری نـدارد قـرار جدول ذیل :



x	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		$-\frac{\pi}{2}$		$-\frac{3\pi}{2}$
$\tan x$		↗	$\pm\infty$	↗	0	↗	$\pm\infty$	↗	0	↗	$\pm\infty$

d. با استفاده از شکل، تابع در نقاط ... $,(0,3\pi),(0,2\pi),(0,\pi),(0,0)$ انعطاف پذیر است.



فصل: چهارم

عنوان: مجموع ریمان

صفحه کتاب: (135)

وقت تدریس: (3 ساعت درسی) ساعت اول درسی

اهداف آموزشی **- دانشی** **- مهارتی** **- ذهنیتی**	- شاگردان مفهوم مجموع ریمان را بدانند. - شاگردان مساحت محصور شدۀ تحت گراف تابع، محور x و خطوط $x=a$ او $x=b$ را دریافت کرده بتوانند. - شاگردان به حل سؤالهای مربوط به مجموع ریمان علاقه‌مند شده و آنرا در حل مسائل روزمره به کار ببرند.
روش های تدریس	سؤال وجواب ، کار انفرادی و کار گروهی
مواد ممد درسی	بکس هندسی، چارت شکل ورودی
توضیح ورودی **(5) دقیقه**	کار های مقدماتی تدریس که بعد از داخل شدن به صنف ضروری است انجام دهید بعد به ارائه درس جدید بپردازید ابتدا به توضیح شکل ورودی پرداخته و برای این کار چارت شکل ورودی را که از قبل تهیه نموده اید آنرا پیش روی صنف آویزان و از شاگردان بپرسید: - شما در شکل چی را می بینید؟ کوشش کنید تا جواب درست را از شاگردان حاصل نمایید در غیر آن شکل را چنین توضیح نمایید. در شکل یکٔ دایره که دارای شعاع واحد است با دو مربع یا چهار ضلعی‌ها مشاهده می گردد؛ چنانچه مربعی که طول اضلاع آن $\sqrt{2}$ واحد بوده و در داخل دایره طوری موقعیت دارد که رأس های آن با محیط دایره در تماس است به نام چهار ضلعی محاطی یاد می گردد؛ اما مربعی که طول اضلاع آن 2 واحد بوده و در خارج دایره طوری موقعیت دارد که اضلاع آن به دایره مماس می باشد به نام چهار ضلعی محیطی گفته می شود. مختصراً معلومات داده، بعد سؤال ورودی را به شکل کار انفرادی به آنها بدهید تا جواب آنرا بیابند و در اخیر مساحت هر چهار ضلعی را با مساحت دایره مقایسه کنند.

فعالیت جریان درس (28)دقیقه

شاگردان را به گروه‌های مناسب تقسیم و به آنها وظیفه دهید تا فعالیت صفحۀ(135)کتاب درسی را در گروه های مربوطۀ خویش انجام دهند. در جریان کار گروهی، کار گروه ها را مشاهده و کنترول نمایید تا تمام شاگردان در انجام فعالیت سهیم بوده و گراف تابع داده شده را در انتروال متذکره درست به فواصل مساوی به مستطیل ها تقسیم، سطح محصور شده را مشخص و مجموع مساحت های مستطیل های تحتانی و فوقانی را دقیق محاسبه و با مساحت

تحت گراف مقایسه کرده بتوانند و در اخیر این نکته را باید بدانند که هر قدر تعداد مستطیل ها بـه روی محـور x در فاصلهٔ داده شده زیاد شده برود به همان اندازه مساحت تحت گراف دقیقتر به دست می آید.

در اخیر فعالیت از نمایندهٔ تمام گروه‌ها با در نظر داشت وقت بخواهید تـا بـه نماینـده گـی از گـروه خـود پـیش روی تخته آمده و کار گروهی خویش را به دیگران قدم به قدم توضیح دهد و اگر اشتباهی موجود بود آنرا اصلاح کنید.

بعد از ختم فعالیت تعریفی که از انجام آن به دست می‌آید و ایجاب توضیح مفصل را می‌نماید و بـه وقـت بیـشتر نیـاز دارد در ساعت دوم درسی واضح گردد.

تحکیم درس (7) دقیقه

برای اینکه شاگردان درس جدید را بهتر فهمیده باشند، در مـورد دریافـت قیمـت دقیـق مـساحت تحـت گـراف تـابع $f(x)=2x+2$ به آنها معلومات دهید و بگویید در فعالیت شکلی که وجود دارد به چهار مستطیل تحتـانی و فوقـانی تقسیم شده و مساحت آنرا دریافتیم؛ اگر بخواهیم مساحت آنـرا دقیقتـر محاسـبه کنـیم بایـد تقـسیمات فواصـل بـالای محور x را بیشتر سازیم یا به عبارهٔ دیگر تعداد مـستطیل هـا را زیـاد نمـاییم در ایـن صـورت مـساحت تحـت گـراف دقیقتر به دست می‌آید.

ارزیابی ختم درس (5) دقیقه

برای اینکه اطمینان حاصل نمایید آیا شاگردان درس ارائه شده را به صورت درست درک نموده اند یا خیر؟ با طرح چند سؤال به طور خلاصه آنها را ارزیابی کنید؛ طور مثال:

- مفهوم مجموع ریمان چیست؟
- چه رابطه بین مساحت سطح محصور شده و مجموع مساحت مستطیل‌های تحتانی و فوقانی وجود دارد؟
- چطور می توان مساحت تحت گراف یک تابع را دقیقتر به دست آورد؟

معلومات اضافی

قرن(17) یکی از مهمترین قرنها در تاریخ ریاضیات است؛ زیرا اساساً دامنهٔ تحقیقات گسترده در ریاضی، در همین قرن بر بشر وسعت یافت. بیشتر از دو هزار سال پیش ارشمیدس فارمول های برای محاسبه سطح وجه ها، ناحیه ها و حجم های جامد؛ مثل: کره، مخروط و پارابول را دریافت روش انتیگرال گیری وی استثنایی و فوق العاده بود.

لایبنز(Leibniz) از(1664–1716) و نیوتن(Newton) از(1642–1727) حساب دیفرانسیل و انتیگرال را کشف کردند، عقیدهٔ کلیدی آنها این بود که مشتق گیری و انتیگرال گیری اثر یکدیگر را خنثی می کنند با استفاده از این ارتباط ها آنها توانستند تعداد از مسایل مهمی را در ریاضی، فزیک و نجوم حل کنند. ریاضیدان معروف قرن(17) که قبل یا همزمان با نیوتن می زیست و در شکل گیری و پیشرفت انتیگرال نقش به سزایی داشته است.

سیمون استوین و لوکاوالریو که روشی را برای محاسبه حجم اجسام دریافتند، یاکوب برنولی که کلمه انتیگرال را برای اولین بار به کار برد. گاوس (1777–1855) اولین جدول انتیگرال را نوشت و همراه با دیگران سعی در عملی کردن انتیگرال در ریاضی و علوم فزیک کرد. ریمان و لیبیزگو انتیگرال معین را بر اساس دلایل منطقی استوار کردند.

جواب به سؤال‌های تمرین:

1- با تقسیم نمودن انتروال $[0,3]$ به شش قسمت مساوی مساحت سطح محصور بین خط $y=3x$ و محور x را محاسبه کنید.

حل: ابتدا انتروال $[0,3]$ را به شش قسمت مساوی تقسیم و عرض مستطیل ها را به دست می آوریم:

$$\Delta x=\frac{b-a}{n}=\frac{3-0}{6}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

طول هر انتروال این مستطیل‌ها عبارت است از:

$$x_0=a=0$$

$$x_1=a+\Delta x=0+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

$$x_2=a+2\Delta x=0+2\cdot\frac{1}{2}=1$$

$$x_3=a+3\Delta x=0+3\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

$$x_4=a+4\Delta x=0+4\cdot\frac{1}{2}=2$$

$$x_5=a+5\Delta x=0+5\cdot\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$$

$$x_6=a+6\Delta x=0+6\cdot\frac{1}{2}=3$$

$$[x_0,x_1],\ [x_1,x_2],\ [x_2,x_3],\ [x_3,x_4]\ ,\ [x_4,x_5],\ [x_5,x_6]$$

$$\left[0,\frac{1}{2}\right]\ ,\ \left[\frac{1}{2},1\right]\ ,\ \left[1,\frac{3}{2}\right]\ ,\ \left[\frac{3}{2},2\right]\ ,\ \left[2,\frac{5}{2}\right],\ \left[\frac{5}{2},3\right]$$

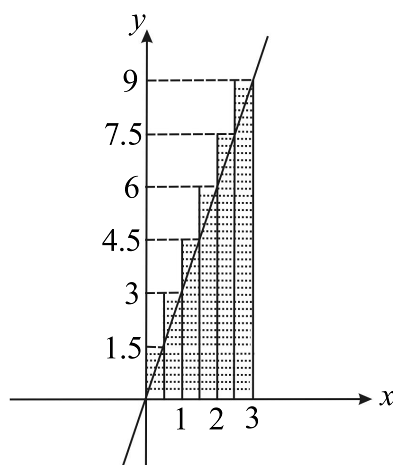
حال با گذاشتن قیمت در معادله طول هر مستطیل را دریافته و گراف آنرا ترسیم می‌کنیم:

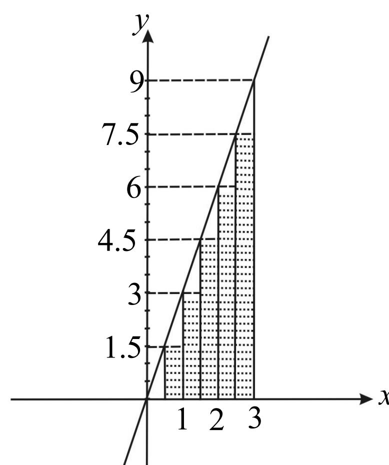
$$y=f(x)=3x$$

$$f(0)=3\cdot 0=0\quad,\quad f(1)=3\cdot 1=3\quad,\quad f(2)=3\cdot 2=6$$

$$f(\frac{1}{2})=3\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\quad,\quad f(\frac{3}{2})=3\cdot\frac{3}{2}=\frac{9}{2}\quad,\quad f(\frac{5}{2})=3\cdot\frac{5}{2}=\frac{15}{2}$$

$$f(3)=3\cdot 3=9$$





$$\text{مجموع مساحت مستطیل‌های تحتانی} = f(x_0)\Delta x + f(x_1)\Delta x + \ \dots\ + f(x_{n-1})\Delta x = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x$$

$$= 0\cdot\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2} + 3\cdot\frac{1}{2} + \frac{9}{2}\cdot\frac{1}{2} + 6\cdot\frac{1}{2} + \frac{15}{2}\cdot\frac{1}{2}$$

$$= 0 + \frac{3}{4} + \frac{3}{2} + \frac{9}{4} + 3 + \frac{15}{4}$$

$$= \frac{3}{4} + \frac{9}{4} + \frac{15}{4} + \frac{3}{2} + 3$$

$$= \frac{3+9+15}{4} + \frac{3+6}{2} = \frac{27}{4} + \frac{9}{2}$$

$$= 6.75 + 4.5 = 11.25$$

$$\text{مجموع مساحت مستطیل‌های فوقانی} = f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \ \dots\ + f(x_n)\Delta x = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

$$= \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2} + 3\cdot\frac{1}{2} + \frac{9}{2}\cdot\frac{1}{2} + 6\cdot\frac{1}{2} + \frac{15}{2}\cdot\frac{1}{2} + 9\cdot\frac{1}{2}$$

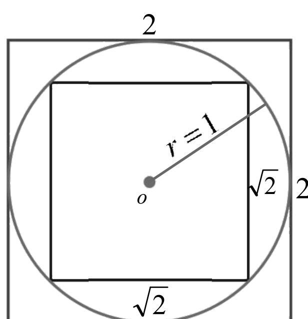
$$= \frac{3}{4} + \frac{3}{2} + \frac{9}{4} + 3 + \frac{15}{4} + \frac{9}{2}$$

$$= \frac{3}{4} + \frac{9}{4} + \frac{15}{4} + \frac{3}{2} + \frac{9}{2} + 3$$

$$= \frac{3+9+15}{4} + \frac{3+9+6}{2} = \frac{27}{4} + \frac{18}{2}$$

$$= 6.75 + 9 = 15.75$$

$$11.25 < A < 15.75$$



فصل چهارم

عنوان: مجموع ریمان

صفحه کتاب:(136- 138)

وقت تدریس: ساعت دوم درسی

اهداف آموزشی **- دانشی** **- مهارتی** **- ذهنیتی**	- شاگردان مفهوم مجموع ریمان را بدانند. - شاگردان گراف توابع داده شده را دقیق رسم کرده بتوانند. - شاگردان از حل مثال های مربوط به مجموع ریمان احساس خوشی نمایند.
روش های تدریس	سؤال وجواب ، تشریح و کار انفرادی
مواد ممد درسی	بکس هندسی، چارت شکل ورودی و چارت شکل صفحهٔ(136) کتاب درسی
توضیح ورودی (5) دقیقه	بعد از انجام کار های مقدماتی تدریس؛ مانند ساعت قبلی چارت شکل ورودی مربوط این درس را که از قبل تهیه نموده بودید باردیگر آنرا پیش روی صنف آویزان و در مورد مختصراً صحبت نمایید تا هوش و حواس شاگردان دو باره به درس جدید معطوف گردد.

فعالیت جریان درس (20)دقیقه

جهت تعریف صفحه (136) کتاب درسی چارت را که از قبل آماده نموده اید آنرا پیش روی صنف آویزان و در مورد طول و عرض مستطیل ها، طول هر انتروال و فارمول مجموع ریمان و لیمیت مجموع ریمان با تطبیق به روی شکل به شاگردان توضیحات مفصل ارائه نمایید. طوری‌که در اثنای توضیحات از شاگردان سؤال‌ها نموده و جواب های قناعت بخش به دست آرید. برای وضاحت بیشتر از یک شاگرد داوطلب بخواهید که تعریف را دو باره بیان نماید تا قناعت همهٔ شاگردان فراهم گردد.

تحکیم درس (17) دقیقه

برای اینکه شاگردان درس جدید را خوبتر فرا گیرند مثال 1 صفحهٔ(137) کتاب درسی را به روی تخته بنویسید و بعد به حل آن اقدام نمایید طوری‌که شاگردان در حل آن سهم فعال داشته باشند، یعنی در جریان حل مثال باید از شاگردان همواره سؤال نمایید و جواب های قناعت بخش به دست آرید.

ارزیابی ختم درس (5) دقیقه:

برای اینکه اطمینان خاطر تان حاصل گردد که آیا شاگردان درس جدید را فهمیده اند یا خیر؟ با طرح چند سؤال به شکل مختصر شاگردان را ارزیابی کنید؛ طور مثال:

- عرض مستطیل ها از کدام رابطه به دست می آید؟
- مجموع مساحت مستطیل های تحتانی و فوقانی از کدام روابط به دست می آیند؟
- رابطه بین مساحت‌های سطح محصور شده توسط گراف تابع خطی و مجموع مساحت مستطیل های تحتانی و فوقانی را به روی تخته بنویسید؟

معلومات اضافی

گیورک فریدریش برنهارد ریمان در سال(1826) در کشور اندوفر که حالا یک قسمت از جمهوری فدرال جرمنی است متولد شد و در سال(1826 – 1866) یکی از پیشتازان ریاضیات در قرن(19) به شمار می رفت. پدرش یکی از خدمت گزاران کلیسا بود و وی در خورد سالی علاقه‌مندی به تاریخ و ریاضیات داشت که ا ز طرف فامیل تشویق می شد و در سال(1840) به سن 14 ساله گی مستقیماً داخل صنف سوم مکتب شد. پس از ختم تحصیلات مقدماتی و متوسطه به پوهنتون گوتینگن(Gottingen) در پوهنځی خدا شناسی پذیرفته شد؛ اما زود به پوهنځی فلسفه منتقل گردید که ساینس و ریاضیات را تعقیب کند. ریمان یکی از برجسته ترین شاگردان گاوس شمرده می شد که در اثر همین توانایی وی بود که توجه دیگر ریاضیدانان را به خود جلب کرده بود که بعداً به پوهنتون برلین رفت و دوباره در سال(1850) به گوتینگن برگشت. ریمان با داشتن تجارب کم باز هم کتاب های چون انالیز کامپلکس، انالیز حقیقی، هندسهٔ تفاضلی، نظریهٔ اعداد وغیره را معرفی کرد. بالآخره در سن(39) ساله گی در ایتالیا درگذشت.

جواب به سؤال های تمرین

2- برای $\Delta x = 0.5$ و با در نظر داشت قیمت های داده شدهٔ جدول زیر، گراف را رسم و مجموع مساحت‌های مستطیل‌های تحتانی و فوقانی آنرا حساب کنید:

x	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3
y	14	20	26	32	38	44	50

حل:

مجموع مساحت‌های مستطیل‌های تحتانی $= 14\cdot 0.5 + 20\cdot 0.5 + 26\cdot 0.5 + 32\cdot 0.5 + 38\cdot 0.5 + 44\cdot 0.5$

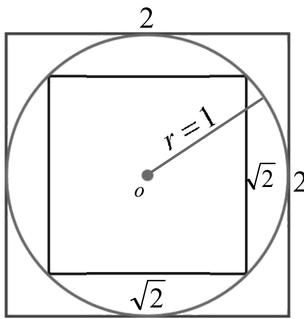
$$= 7+10+13+16+19+22 = 87$$

مجموع مساحت‌های مستطیل‌های فوقانی $= 20\cdot 0.5 + 26\cdot 0.5 + 32\cdot 0.5 + 38\cdot 0.5 + 44\cdot 0.5 + 50\cdot 0.5$

$$= 10+13+16+19+22+25 = 105$$

$$87 < A < 105$$

چون جدول ترتیب است، ترسیم گراف آن اشکال ندارد؛ زیرا در مقابل هر قیمت x یک قیمت y وجود دارد اما از این که قیمت‌های y بزرگ است ترسیم گراف آن به یک صفحهٔ بزرگ نیاز دارد.



فصل چهارم

عنوان: مجموع ریمان

صفحهٔ کتاب: (138– 139)

وقت تدریس: ساعت سوم درسی

اهداف آموزشی **- دانشی** **- مهارتی** **- ذهنیتی**	- شاگردان مفهوم مجموع ریمان را بدانند. - شاگردان حل سؤال های مربوط به مجموع ریمان را از قیمت لیمیت مجموع ریمان فرق کرده بتوانند. - شاگردان از حل مثال های مربوط به لیمیت مجموع ریمان احساس خوشی نمایند.
روش های تدریس	سؤال وجواب ، کار انفرادی
مواد ممد درسی	مواد را که شما لازم می دانید.
توضیح ورودی **(5) دقیقه**	بعد از انجام کار های مقدماتی تدریس که بعد از داخل شدن به صنف ضرور است به ارائهٔ درس جدید بپردازید؛ طوریکه از درس روز گذشته؛ مانند: زیر سؤالات تهیه و از شاگردان بپرسید: - چطور می توان سطح زیر گراف منحنی یک تابع را منظم کرد؟ - چه رابطه بین مساحت سطح محصور شده و مجموع مساحت‌های مستطیل‌های تحتانی و فوقانی وجود دارد؟

فعالیت جریان درس (23)دقیقه

مثال(2) صفحه (138) کتاب درسی را به روی تخته بنویسید و از یک شاگرد بخواهید تا مثال مذکور را به روی تخته حل کند. همزمان از سایر شاگردان بخواهید تا مثال را در کتابچه های شان به شکل انفرادی حل نمایند. اگر در حل روی تخته اشتباهی وجود داشت از یک شاگرد داوطلب بخواهید تا آنرا اصلاح کند.

زمانیکه مطمئن شدید که حل سؤال روی تخته کاملاً درست است. از سایر شاگردان بخواهید تا سؤال حل شدهٔ کتابچه‌های شان را با سؤال حل شدهٔ روی تخته مقایسه و اگر اشتباهی داشتند آنرا اصلاح نمایند.

تحکیم درس (12) دقیقه

برای اینکه شاگردان به مفهوم درس جدید خوب پی ببرند؛ سؤالی مانند سؤال ذیل را به روی تخته نوشته و آنرا با سهمگیری فعال شاگردان حل کنید؛ طور مثال:

سؤال: لیمیت مجموع ریمان تابع $y = x^2$ را در انتروال $[0,1]$ دریافت نمایید.

حل:

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{n} = \frac{1}{n}$$

$$x_i = a + \Delta x i = 0 + \frac{1}{n}i = \frac{1}{n}i$$

$$\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x\right] = \lim_{n\to\infty}\left[\Delta x \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\right] = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i)^2\right] = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\frac{1}{n}i)^2\right] = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i^2\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right] = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n^3}\cdot\frac{(n^2+n)(2n+1)}{6}\right] = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{2n^3+n^2+2n^2+n}{6n^3}\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{2n^3+3n^2+n}{6n^3}\right] = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{2n^3}{6n^3}+\frac{3n^2+n}{6n^3}\right] = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{3}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2}\right] = \frac{1}{3}$$

ارزیابی ختم درس (5) دقیقه

برای اینکه مطمئن شوید آیا شاگردان درس جدید را خوبتر فرا گرفته اند یا خیر؟ با طرح چند سؤال درس را طور زیر ارزیابی کنید؛ طور مثال:

- مجموع ریمان و لیمیت مجموع ریمان یعنی چه؟
- برای دریافت لیمیت مجموع ریمان، طول مستطیل ها از کدام رابطه به دست می آید؟

معلومات اضافی

طوریکه می دانید دریافت مساحت تحت گراف یک منحنی کار سادهٔ نیست، چون سطح تحت یا زیر منحنی یک تابع دارای شکل منظم هندسی نمی باشد. پس هیچ فارمول تعریف شدهٔ برای پیدا کردن مساحت آن وجود ندارد؛ بنابر این برای این کار از فارمول مساحت مستطیل استفاده کرده و محور x را با نقاط دریافت شده تقسیم می کنیم و عرض مستطیل ها را با این نقاط تشکیل نموده و با دریافت مجموع مساحت مستطیل های تحتانی می توان مساحت تحت گراف را تخمین نمود.

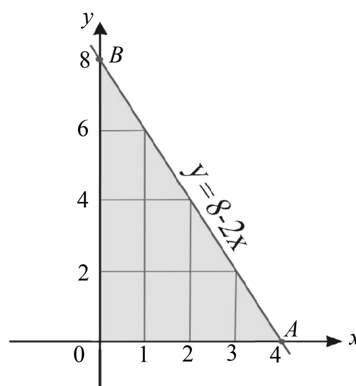
مجموع ریمان $(\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x)$: عبارت از مجموع مساحت‌های مستطیل های فوقانی گراف یک تابع است.

لیمیت مجموع ریمان $(\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x)$: عبارت از فارمول انتیگرال یک تابع است.

جواب به سؤال های تمرین

3- مساحت مثلث OAB تحت خط $y=8-2x$ شکل زیر را در انتروال $[0,4]$ با استفاده از لیمیت مجموع ریمان دریابید.

حل:



$$\Delta x=\frac{b-a}{n}=\frac{4-0}{n}=\frac{4}{n}$$

$$x_i=a+\Delta x i=0+\frac{4}{n}i=\frac{4}{n}i$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}f(x_i)\Delta x=\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{i=1}^{n}(8-2x_i)\Delta x\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\Delta x\sum_{i=1}^{n}(8-2x_i)\right]=\lim_{n\to\infty}\left[\Delta x\cdot\sum_{i=1}^{n}8-\Delta x\cdot\sum_{i=1}^{n}2x_i\right]=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{4}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}8-\frac{4}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}2x_i\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{4}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}8-\frac{4}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}2(\frac{4}{n}i)\right]=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{4}{\not n}\cdot 8\not n-\frac{4}{n}\cdot 2\sum_{i=1}^{n}\frac{4}{n}i\right]=\lim_{n\to\infty}\left[32-\frac{8}{n}\cdot\frac{4}{n}\sum_{i=1}^{n}i\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[32-\frac{32}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}\right]=\lim_{n\to\infty}\left[32-\frac{32}{n^2}\cdot\frac{n^2+n}{2}\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[32-\frac{32n^2+32n}{2n^2}\right]=\lim_{n\to\infty}\left[32-\frac{32n^2}{2n^2}+\frac{32n}{2n^2}\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[32-16+\frac{16}{n}\right]=\lim_{n\to\infty}\left[16+\frac{16}{n}\right]=16+\frac{6}{\infty}=16$$

این نتیجه درست است؛ چرا که مساحت مثلث با استفاده از شکل عبارت است از:

$$S=\frac{1}{2}b\cdot h=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 8=\frac{1}{2}\cdot 32=16$$



فصل: چهارم

عنوان: مفهوم انتیگرال

صفحهٔ کتاب: (141- 142)

وقت تدریس: یک ساعت درسی

<table>
<tr><td>اهداف آموزشی
- دانشی
- مهارتی
- ذهنیتی</td><td>- شاگردان مفهوم انتیگرال را بدانند.
- شاگردان انتیگرال غیر معین را به حیث یک تابع اولیه بشناسند.
- شاگردان از حل مثال های انتیگرال غیر معین احساس خوشی نمایند.</td></tr>
<tr><td>روش های تدریس</td><td>سؤال وجواب، توضیح، کار گروهی و کار انفرادی</td></tr>
<tr><td>مواد ممد درسی</td><td>چارت شکل ورودی</td></tr>
<tr><td>توضیح ورودی
(5) دقیقه</td><td>بعد از انجام کار های مقدماتی تدریس که بعد از داخل شدن به صنف برای هر معلم ضرور است؛ به توضیح شکل ورودی درس جدید بپردازید؛ طوریکه برای این کار چارت شکل ورودی را که از قبل تهیه نموده اید آنرا پیش روی صنف آویزان و از شاگردان سؤال کنید:
- در شکل ورودی چی را می بینید؟
- اگر این شکل را به قسم یک منحنی در نظر بگیریم مساحت آنرا چطور می توان دریافت کرد؟
سعی کنید تا از شاگردان جواب‌های قناعت بخش به دست آرید در غیر آن خود در مورد شکل طور زیر معلومات بدهید:
شما در شکل تصویر یک مسجد شریف را مشاهده می‌کنید که قسمت تحتانی آن شکل یک مکعب را دارد و قسمت فوقانی آن گنبدی شکل است. حال اگر مستطیل های چهار سمت را به طرف بالا امتداد دهیم تا قسمت فوقانی گنبد برسد در این صورت برای دریافت مساحت کلی این شکل از مجموع مساحت‌های مستطیل ها استفاده می نماییم که این کار به وسیلهٔ انتیگرال صورت می گیرد.</td></tr>
</table>

فعالیت جریان درس (30)دقیقه

تعریف انتیگرال که در صفحهٔ(141) کتاب درسی آمده است آنرا به شاگردان ارائه، بعد علامه و رابطهٔ آنرا به روی تخته بنویسید و انواع آن را واضح سازید:

اکنون شاگردان را به گروه های مناسب تقسیم و آنها را موظف سازید تا فعالیت صفحهٔ(141) کتاب درسی را در

گروه ها انجام دهند. در جریان کار گروهی از کار گروه ها نظارت نمایید تـا همـۀ شـاگردان در انجـام کـار گروهـی سهم فعال داشته باشند و در صورت بروز مشکلات آنها را رهنمایی کنید. در اخیـر کـار گروهـی در صـورت مـساعد بودن وقت از نمایندۀ تمام گروه ها بخواهید تا کار گروهی خـویش را پـیش روی تختـه آمـده و بـه دیگـران توضـیح دهند. اگر در اثنای توضیحات اشتباهاتی موجود باشد آنرا تصحیح کنید.

اکنون تعریفی که از نتیجۀ فعالیت فوق به دست آمـده اسـت آنـرا بـه شـاگردان توضـیح و رابطـۀ آنـرا بـه روی تختـه بنویسید. حال مثال 1 صفحۀ 142 کتاب درسی را به روی تخته بنویسید و آنرا با سهم فعال شاگردان حل کنیـد. مثـال (2) همین صفحه را به روی تخته نوشته و از یک شاگرد بخواهید تـا آنـرا بـه روی تختـه حـل کنـد. همزمـان از سـایر شاگردان بخواهید تا مثال مذکور را در کتابچه های شان به شکل انفرادی حل کننـد. اگـر در حـل روی تختـه غلطـی وجود داشت از یک شاگرد داوطلب بخواهید تا آنرا اصلاح کنـد. زمانیکـه متـیقن شـدید کـه حـل سـؤال روی تختـه کاملاً درست است به شاگردان دیگر بگویید که حل های شـان را بـا حـل سـؤال روی تختـه مقایـسه و اگـر اشـتباهی داشته باشند آنرا اصلاح کنند.

تحکیم درس (5) دقیقه

برای اینکه شاگردان درس جدیدرا بهتر درک کنند؛ مثال(3) صفحۀ(142) کتاب درسی را بـه روی تختـه نوشـته و آنرا باسهم فعالانۀ شاگردان حل کنید.

ارزیابی ختم درس (5) دقیقه

برای اینکه مطمئن شوید آیا شاگردان درس امروز را فرا گرفته اند یاخیر؟ با طرح سؤالات؛ مانند زیر بـه طـور خلـص آنها را ارزیابی کنید؛ طور مثال:

- علامۀ انتیگرال از کدام کلمه گرفته شده است؟
- انتیگرال غیر معین را تعریف و رابطۀ آنرا به روی تخته بنویسید.
- انتیگرال را تعریف و بگویید به چند نوع است؟

معلومات اضافی

در سال (1969) رایسیچ کار بزرگی را در زمینۀعلمی ساختن انتیگرال غیر معین انجام داد و بعد کارش را بـر اسـاس تیوری عمومی وتجربی انتیگرال گیری ذریعۀ قوانین بنیادی منتشر کرد. روش او عملاً در قضایای بنیادی در آن زمـان قابل استفاده نبود.

زیرا در آن به یک معادله مشتق گیری مشکل نیاز بود تا حل شود. بعد از آن تمام تلاش های وی بـا حـل ایـن معادلـه به روش علمی، موفقیت های مختلف را برای قضیۀاساسی به وجود آورد که باعث پیشرفت روش علمـی وی گردیـد بالآخره در دهۀ(1980) پیشرفت های برای توسعۀ روش او در موارد خاص در قضیه های اساسی به وجود آمد.

جواب به سؤال های تمرین

انتیگرال های زیر را محاسبه کنید:

حل جزء a):

$$\int \sqrt[5]{x^3}\,dx = \int x^{\frac{3}{5}}dx = \frac{x^{\frac{3}{5}+1}}{\frac{3}{5}+1}+C = \frac{x^{\frac{3+5}{5}}}{\frac{3+5}{5}}+C = \frac{x^{\frac{8}{5}}}{\frac{8}{5}}+C = \frac{5}{8}\sqrt[5]{x^8}+C$$

حل جزء b):

$$\int \frac{1}{x^4}dx = \int x^{-4}dx = \frac{x^{-4+1}}{-4+1}+C = \frac{x^{-3}}{-3}+C = -\frac{1}{3x^3}+C$$

حل جزء c):

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \int \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}dx = \int x^{-\frac{1}{2}}dx = \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}+C = \frac{x^{\frac{-1+2}{2}}}{\frac{-1+2}{2}}+C = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+C = 2x^{\frac{1}{2}}+C = 2\sqrt{x}+C$$

حل جزء d):

$$\int \frac{x^2dx}{\sqrt[4]{x^2}} = \int \frac{x^2dx}{x^{\frac{2}{4}}} = \int \frac{x^2dx}{x^{\frac{1}{2}}} = \int x^2 \cdot x^{-\frac{1}{2}}dx = \int x^{2-\frac{1}{2}}dx = \int x^{\frac{4-1}{2}}dx = \int x^{\frac{3}{2}}dx$$

$$= \frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1}+C = \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}+C = \frac{2}{5}\sqrt{x^5}+C$$

حل جزء e):

$$\int \sqrt[8]{x^4}\cdot x\,dx = \int x^{\frac{4}{8}}\cdot x\,dx = \int x^{\frac{1}{2}}\cdot x dx = \int x^{\frac{1}{2}+1}dx = \int x^{\frac{1+2}{2}}dx = \int x^{\frac{3}{2}}dx$$

$$= \frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1}+C = \frac{x^{\frac{3+2}{2}}}{\frac{3+2}{2}}+C = \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}+C = \frac{2}{5}\sqrt{x^5}+C$$

$$\left.\begin{array}{l}\int k\ dx \\ \int [f(x) \pm g(x)]\ dx \\ \int [f(x)\cdot g(x)]\ dx \\ \int \dfrac{f(x)}{g(x)} dx \quad ,\ g(x) \neq 0\end{array}\right\} = ?$$

فصل: چهارم

عنوان: خواص انتیگرال غیر معین

صفحهٔ کتاب:(143- 144)

وقت تدریس: (2 ساعت درسی) ساعت اول درسی

اهداف آموزشی **- دانشی** **- مهارتی** **- ذهنیتی**	- شاگردان خواص انتیگرال غیر معین را بدانند. - شاگردان خواص انتیگرال غیر معین را بالای مثال ها تطبیق کرده بتوانند. - شاگردان از حل مثال های خواص انتیگرال غیر معین احساس خوشی کرده و آنرا در زنده‌گی روزمرهٔ خویش به کار ببرند.
روش های تدریس	سؤال وجواب ، کار گروهی و انفرادی
مواد ممد درسی	چارت شکل ورودی
توضیح ورودی **(5) دقیقه**	بعد از انجام کار های مقدماتی تدریس که بعد از داخل شدن به صنف ضرور است به ارائهٔ درس جدید بپردازید؛ برای توضیح شکل ورودی این درس چارتی را که از قبل تهیه نموده اید آنرا پیش روی صنف آویزان و در مورد از شاگردان سؤال نمایید: در شکل ورودی چی را می بینید؟ - با استفاده از خواص لیمیت و مشتق گفته می توانید که این انتیگرال ها مساوی به چیست؟ کوشش کنید تا جواب درست را از شاگردان حاصل نمایید در غیر آن شما خود روابط را تکمیل کنید؛ طور مثال: در ورودی یک حد ثابت، حاصل جمع و حاصل تفریق و همچنان انتیگرال‌های حاصل ضرب و حاصل تقسیم را مشاهده می کنید. و در مورد سؤال دوم بگویید که: انتیگرال حد ثابت مساویست به حد ثابت از متحول، جمع یک عدد C، انتیگرال یک تابع حاصل جمع، حاصل تفریق، حاصل ضرب و حاصل تقسیم مساویست به حاصل جمع، حاصل تفریق، حاصل ضرب و حاصل تقسیم هر یک از انتیگرال ها به طور جداگانه.
فعالیت جریان درس (30)دقیقه شاگردان را به گروه‌ها تقسیم و به هر گروه وظیفه دهید تا فعالیت صفحهٔ(143) کتاب درسی را در گروه مربوطه انجام دهند. در اثنای کار گروهی، کار گروه ها را مشاهده و کنترول کنید تا تمام شاگردان در اجرای فعالیت سهیم بوده و اگر به مشکلی روبرو می شوند آنها را رهنمایی لازم نمایید.	

در اخیر فعالیت از نمایندهٔ هر گروه با در نظر داشت وقت بخواهید تا به نماینده گی از گروه خود به روی تخته آمده و کار گروهی خود را به دیگران واضح سازد. اگر در حل آنها اشتباهی وجود داشت آنرا اصلاح کنید.
خاصیت انتیگرال غیر معین را که در نتیجهٔ این فعالیت به وجود آمده است. ابتدا رابطهٔ خاصیت اول و دوم آنرا به روی تخته نوشته توضیح و بعد مثال های آنها را با سهم گیری فعال شاگردان حل کنید.
اکنون رابطه و مثال خاصیت سوم انتیگرال غیر معین را به روی تخته بنویسید و از یک شاگرد بخواهید تا به روی تخته آمده رابطه و بعد مثال این خاصیت را حل کند. همزمان از سایر شاگردان بخواهید تا این خاصیت را در کتابچه های شان به شکل انفرادی حل نمایند. اگر در حل سؤال روی تخته کدام اشتباهی وجود داشت از یک شاگرد داوطلب بخواهید تا آنرا اصلاح کند.
زمانیکه مطمئن شدید حل سؤال روی تخته کاملاً درست است از شاگردان دیگر بخواهید تا حل های شان را با حل سؤال روی تخته مقایسه و اگر در حل سؤال شان اشتباهی وجود داشت آنرا اصلاح نمایند.

تحکیم درس (5) دقیقه

برای اینکه شاگردان مفهوم درس جدید را بهتر درک کنند؛ رابطهٔ خاصیت چهارم انتیگرال غیر معین را که حاصل جمع و حاصل تفریق دو تابع است به روی تخته نوشته توضیح و بعد مثال های آنرا با سهم فعال شاگردان حل کنید. یعنی در جریان حل مثال ها از شاگردان همواره سؤال و جواب های قناعت بخش به دست آرید.

ارزیابی ختم درس (5) دقیقه

برای اینکه اطمینان تان حاصل شود آیا شاگردان از جمله خواص انتیگرال غیر معین(4) خواص آنرا درک نموده اند یا خیر؟ آنها را با طرح سؤال‌های ذیل ارزیابی کنید:

- چند خواص انتیگرال غیر معین را مطالعه نموده اید؟
- انتیگرال یک تابع ثابت مساوی به چیست؟
- حاصل جمع و حاصل تفریق دو تابع تحت انتیگرال مساوی به چیست؟

جواب به سؤال های تمرین

از خواص انتیگرال استفاده نموده و انتیگرال های زیر را به دست آرید:

حل جزa)

اگر k یک عدد ثابت مثبت یا منفی باشد داریم که:

$$\int k dx = k\int dx = kx + C$$

$$\int -17 dx = -17\int dx = -17x + C$$

حل جزc)

$$\int 2x^4 dx = ?$$

$$\int a\, f(x)dx = a\int f(x)dx$$

$$\int 2x^4 dx = 2\int x^4 dx = 2\cdot\frac{x^{4+1}}{4+1} + C = 2\frac{x^5}{5} + C = \frac{2}{5}x^5 + C$$

حل جزf)

$$\int (2x+3)^6 dx = ?$$

$$2x+3 = u \quad \Rightarrow \; d(2x+3) = du \quad \Rightarrow \; 2dx = du \quad \Rightarrow \; dx = \frac{du}{2}$$

$$\int u^6 \frac{du}{2} = \frac{1}{2}\frac{u^{6+1}}{6+1} + C = \frac{1}{2}\frac{(2x+3)^7}{7} + C$$

$$= \frac{1}{14}(2x+3)^7 + C$$

حل جزh)

$$\int (2+x)\, dx = ?$$

$$\int (2+x)dx = \int 2dx + \int xdx = 2x + \frac{x^2}{2} + C = 2x + \frac{1}{2}x^2 + C$$

$$\left.\begin{array}{l}\int k\ dx \\ \int [f(x) \pm g(x)]\ dx \\ \int [f(x) \cdot g(x)]\ dx \\ \int \frac{f(x)}{g(x)} dx \quad , g(x) \neq 0\end{array}\right\} = ?$$

فصل چهارم

عنوان: خواص انتیگرال غیر معین

صفحۀ کتاب:(144- 146)

وقت تدریس: ساعت دوم درسی

اهداف آموزشی **- دانشی** **- مهارتی** **- ذهنیتی**	- شاگردان خواص انتیگرال غیر معین را بدانند. - شاگردان خواص انتیگرال غیر معین را بالای سؤال ها تطبیق کرده بتوانند. - شاگردان در حل مسائل ریاضی از خاصیت‌های انتیگرال غیرمعین استفاده کرده بتوانند. - شاگردان از حل سؤال ها و مثال های خواص انتیگرال غیر معین احساس خوشی نمایند.
روش های تدریس	سؤال وجواب ، کار انفرادی
مواد ممد درسی	چارت شکل ورودی
توضیح ورودی **(5) دقیقه**	بعد از انجام کار های مقدماتی تدریس که بعد از داخل شدن به صنف برای هر معلم ضرور است به توضیح بخش ورودی درس جدید بپردازید؛ برای این کار چارت شکل ورودی ساعت قبلی را که از قبل تهیه نموده اید آنرا یکبار دیگر پیش روی صنف آویزان کنید و در مورد توضیحات داده شده مربوط به بخش ورودی از شاگردان سؤال نمایید و جواب های قناعت بخش به دست آرید.

فعالیت جریان درس (28)دقیقه

روابط خاصیت پنجم وششم انتیگرال غیر معین را با مثال های آن به روی تخته بنویسید و از دو نفر شاگرد بخواهید تا به نوبت هر کدام به روی تخته رفته روابط را توضیح و مثال ها را حل کنند. همزمان از دیگر شاگردان بخواهید تا روابط را در کتابچه های شان به شکل انفرادی تکمیل و مثال ها را حل نمایند. اگر در حل سؤال روی تخته کدام اشتباهی موجود بود از دو شاگرد داوطلب به نوبت بخواهید تا آنرا اصلاح کنند.

وقتی کاملاً مطمئن شدید که حل سؤال روی تخته درست است از سایر شاگردان بخواهید تا حل سؤال کتابچه های خود را با حل روی تخته مقایسه و اگر در حل شان کدام اشتباهی وجود داشته باشد آنرا تصحیح نمایند.

تحکیم درس (5) دقیقه

برای اینکه شاگردان به مفهوم درس جدید خوبتر پی ببرند؛ رابطه و مثال خاصیت هفتم صفحه(145) کتاب درسی را به روی تخته بنویسید، رابطۀ آنرا توضیح و بعد مثال آنرا حل کنید؛ طوریکه شاگردان در حل آن سهم فعال داشته باشند.

ارزیابی ختم درس (5) دقیقه:

برای اینکه مطمئن شوید آیا شاگردان از جمله خاصیت 5 ، 6 و 7 انتیگرال غیر معین را درک نموده اند یا خیر؟ با طرح چند سؤال آنها را طور زیر ارزیابی کنید؛ طور مثال:

- انتیگرال غیر معین دارای چند خواص است؟
- انتیگرال یک تابع پولینومی مساوی به چیست؟
- حاصل ضرب و حاصل تقسیم دو تابع تحت انتیگرال مساوی به چیست؟

جواب به سؤال های تمرین

از خواص انتیگرال غیر معین استفاده نموده و انتیگرال های زیر را به دست آرید:

حل جزb)

$$\int \frac{(1+x)^2}{1+x}dx = ?$$

$$\int \frac{f(x)}{g(x)}dx = \int \frac{(1+x)^2}{1+x}dx = \int \frac{(1+x)(1+x)}{1+x}dx = \int (1+x)dx = \int 1dx + \int xdx = x + \frac{x^2}{2} + C$$

حل جزd)

$$\int \frac{1}{x^5}dx = ?$$

$$\int \frac{f(x)}{g(x)}dx = \int \frac{1}{x^5}dx = \int x^{-5}dx = \frac{x^{-5+1}}{-5+1} + C = \frac{x^{-4}}{-4} + C = \frac{1}{-4x^4} + C$$

حل جزe)

$$\int (2x^2 + 4x^3 - 5x + 9)dx = ?$$

$$\int [f_1(x) + f_2(x) + \ \dots \ + f_n(x)]dx = \int f_1(x)dx + \ \dots + \int f_n(x)dx$$

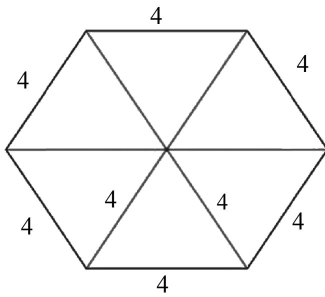
$$\int (2x^2 + 4x^3 - 5x + 9)dx = \int 2x^2dx + \int 4x^3dx - \int 5xdx + \int 9dx = 2(\frac{x^3}{3}) + 4(\frac{x^4}{4}) - 5\frac{x^2}{2} + 9x + C$$

$$= \frac{2x^3}{3} + x^4 - \frac{5x^2}{2} + 9x + C$$

حل جزg)

$$\int \frac{x^3 + 2x^2}{x^2}dx = ?$$

$$\int \frac{f(x)}{g(x)}dx = \int \frac{x^3 + 2x^2}{x^2}dx = \int \frac{x^2(x+2)}{x^2}dx = \int (x+2)\,dx = \int xdx + \int 2dx = \frac{x^2}{2} + 2x + C$$



فصل: چهارم

عنوان: انتیگرال معین

صفحهٔ کتاب:(147– 148)

وقت تدریس: یک ساعت درسی

اهداف آموزشی **- دانشی** **- مهارتی** **- ذهنیتی**	– شاگردان مفهوم انتیگرال معین را بدانند. – شاگردان سؤال های مربوط به انتیگرال معین را حل کرده بتوانند. – شاگردان از حل مثال های انتیگرال معین احساس خوشی کرده و آنرا در زندہ‌گی روزمرۀ خود به کار بگیرند.
روش های تدریس	سؤال وجواب ، کارگروهی، تشریح ، کار انفرادی
مواد ممد درسی	بکس هندسی، چارت شکل ورودی
توضیح ورودی **(5) دقیقه**	بعد از انجام کار های مقدماتی تدریس به ارائه درس جدید بپردازید؛ طوریکه ابتدا شکل ورودی را توضیح و برای این کار چارتی را که از قبل آماده نموده اید آنرا پیش روی صنف آویزان و در مورد از شاگردان سؤال کنید: - در شکل ورودی چی را می بینید؟ سعی نمایید تا از شاگردان جواب های قناعت بخش به دست آرید. در غیر آن شما خود شکل را طور زیر توضیح کنید. در شکل یک شش ضلعی منظم با طول اضلاع 4 واحد که با ترسیم اقطار آن شش مثلث را تشکیل نموده است مشاهده می گردد. بعد سؤال ورودی را به شکل انفرادی به آنها بدهید. که مساحت هر مثلث را دریافته و مجموع آنها را با مساحت شش ضلعی که از رابطه $\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2$ به دست می آید مقایسه کنند که محاسبهٔ آن در معلومات اضافی می‌باشد.

فعالیت جریان درس (28)دقیقه

شاگردان را به گروه های مناسب تقسیم و به آنها وظیفه دهید تا به مشورۀ یکدیگر فعالیت صفحهٔ(147) کتاب درسی را انجام دهند.

در جریان کار گروهی از کار گروه ها مواظبت نمایید تا تمام آنها در انجام فعالیت سهیم باشند و در صورت بروز مشکل آنها را رهنمایی کنید.

در اخیر فعالیت از نمایندۀ یک گروه با در نظر داشت وقت بخواهید تا کار گروهی خود را به دیگران توضیح نمایند.

درختم فعالیت، تعریفی که از نتیجۀ آن به دست می‌آید رابطۀ آنرا به روی تخته نوشته تشریح و توضیح نمایید.

اکنون مثال(1) صفحهٔ(147) کتاب درسی را به روی تخته بنویسید و آنرا با سهم گیری فعال شاگردان حل نمایید.

حال مثال(2) همین صفحه را به روی تخته نوشته و از یک شاگرد بخواهید تا گراف این تابع را به روی تخته ترسیم و بعد مساحت سطح محصور شدۀ آنرا محاسبه کند. در عین زمان از شاگردان دیگر بخواهید تا مثال مذکور را در کتابچه‌های شان به شکل انفرادی انجام دهند. اگر در حل سؤال روی تخته احیاناً اشتباهی وجود داشت از یک شاگرد داوطلب بخواهید تا آنرا اصلاح کند؛ وقتی مطمئن شدید که حل سؤال روی تخته کاملاًدرست است از سایر شاگردان بخواهید تا سؤال حل شدۀ کتابچه‌های شان را با سؤال حل شدۀ روی تخته مقایسه و اگر دچار اشتباهی شده بودند آنرا اصلاح نمایند.

تحکیم درس (7) دقیقه

برای اینکه شاگردان درس جدید را بهتر درک نمایند مثال(3) صفحۀ(148) کتاب درسی را به روی تخته نوشته، گراف آنرا ترسیم و بعد با استفاده از گراف، مساحت سطح محصور شده را دریافت و نتیجه را با قیمت انتیگرال مورد نظر مقایسه کنید طوریکه شاگردان در حل مثال سهم فعال داشته باشند.

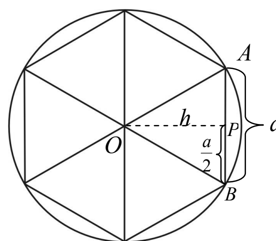
ارزیابی ختم درس (5) دقیقه:

برای اینکه اطمینان حاصل نمایید آیا شاگردان درس امروز را فرا گرفته اند یاخیر؟ آنها را طور مختصر ارزیابی کنید؛ مانند زیر:

- انتیگرال معین را تعریف کنید؟
- مساحت شش ضلعی مساوی به چیست؟
- آیا مساحت سطح محصور شده مساوی به قیمت انتیگرال مورد نظر است یاخیر؟

معلومات اضافی

برای دریافت فارمول مساحت یک شش ضلعی منظم، ابتدا اقطار آنرا؛ مانند: شکل ورودی این درس ترسیم می نماییم تا شش مثلث تشکیل شود. حال یک مثلث آنرا طور زیر در نظر می‌گیریم چون فارمول مساحت مثلث $S=\frac{1}{2}a\cdot h$ است که در اینجا نظر به شکل، a قاعده؛ اما ارتفاع آن، یعنی h نامعلوم بوده و برای دریافت آن از رأس مثلث یک قطعه خط به ضلع مقابل آن رسم و آنرا OP می نامیم و به کمک قضیۀ فیثاغورث داریم که :



$$\overline{OB}^2=\overline{OP}^2+\overline{PB}^2$$

$$a^2=\overline{OP}^2+(\frac{a}{2})^2$$

$$OP^2=a^2-\frac{a^2}{4}$$

$$OP^2=\frac{4a^2-a^2}{4}$$

$$OP^2=\frac{3a^2}{4}$$

$$OP=\frac{\sqrt{3}}{2}a$$ ارتفاع مثلث

اکنون مساحت مثلث AOB مساویست به:

$$S = \frac{1}{2} a \cdot h$$

$$S_{AOB} = \frac{1}{2} a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a$$

$$S_{AOB} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot a^2$$

چون شش مثلث در داخل مضلع منظم وجود دارد پس داریم که:

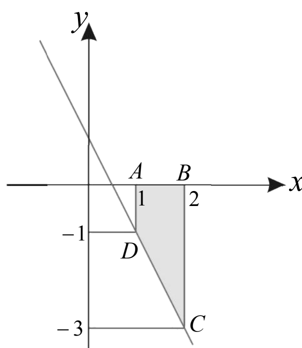
$$S_{ABCDEF} = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$$

$$S_{ABCDEF} = \frac{3\sqrt{3}}{2} a^2$$

پس از این جا نتیجه گرفته می‌شود که مجموع مساحت‌های مثلث‌هـای داخـل شـش ضـلعی مـساوی بـه مـساحت شـش ضلعی است.

جواب به سؤال های تمرین

1- : با استفاده از شکل مقابل، مساحت محصور بین خط $y = -2x + 1$ و محور x را محاسبه کنید.



حل:

گراف تابع $y = -2x + 1$ توسط قیمت دادن برای x از 0 الی 2 بـه دسـت آمـده اسـت. طوریکـه در گـراف مـشاهده می‌کنید، مساحت سطح محصور شده بین خط $y = -2x + 1$ و محور x یـک ذوزنقـه بـوده کـه فورمـول مـساحت آن $A = \frac{1}{2}(a+b) \cdot h$ می‌باشد که با استفاده از شکل، ابتدا مساحت ذوزنقه را طور زیر محاسبه می‌نماییم:

$$A = \frac{1}{2}[AD + BC] \cdot AB = \frac{1}{2}[(1) + (3)] \cdot 1$$

$$A = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = \frac{1+3}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

اکنون قیمت انتیگرال تابع مورد نظر عبارت است از:

$$\int_1^2 (-2x+1)dx = \int_1^2 (-2x)dx + \int_1^2 dx = \left[-\frac{2x^2}{2}\right]_1^2 + [x]_1^2 = [-4+1] + [2-1] = -3+1 = -2$$

در نتیجه گفته می توانیم که مساحت ذوزنقه مساوی به مساحت سطح محصور شده است.

2- مجموع مساحت‌های مستطیل های تحتانی و فوقانی تابع $f(x)=x^2$ را در انتروال $[0,1]$ و $n=4$ حساب کنید.

حل: ابتدا عرض مستطیل ها را می یابیم که:

$$\Delta x=\frac{b-a}{n}=\frac{1-0}{4}=\frac{1}{4}$$

طول هر یک از انتروال این مستطیل‌ها عبارت است از:

$$x_0=a=0$$

$$x_1=a+\Delta x=0+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$$

$$x_2=a+2\Delta x=0+2(\frac{1}{4})=\frac{1}{2}$$

$$x_3=a+3\Delta x=0+3(\frac{1}{4})=\frac{3}{4}$$

$$x_4=a+4\Delta x=0+4(\frac{1}{4})=1$$

$$\left[0,\frac{1}{4}\right]\ ,\ \left[\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right]\ ,\ \left[\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right]\ ,\ \left[\frac{3}{4},1\right]$$

اکنون توسط معلوم کردن قیمت تابع، طول مستطیل ها را دریافته، بعد گراف آنرا ترسیم می‌نماییم:

$$f(x)=x^2$$

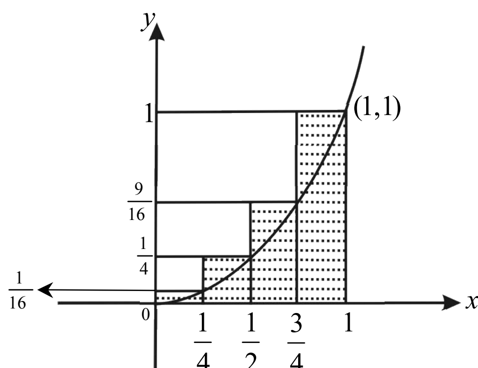
$$f(0)=0^2=0$$

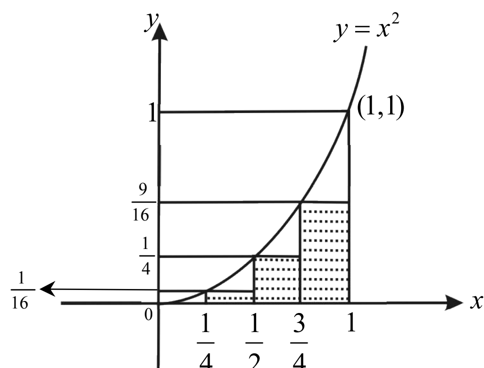
$$f(\frac{1}{4})=(\frac{1}{4})^2=\frac{1}{16}=0.0625$$

$$f(\frac{1}{2})=(\frac{1}{2})^2=\frac{1}{4}=0.25$$

$$f(\frac{3}{4})=(\frac{3}{4})^2=\frac{9}{16}=0.5625$$

$$f(1)=1^2=1$$





$$\text{مجموع مساحت‌های مستطیل‌های تحتانی} = f(x_0)\Delta x + f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \ \dots\ + f(x_{n-1})\Delta x = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x$$

$$= 0\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{16}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4} + \frac{9}{16}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{64} + \frac{1}{16} + \frac{9}{64}$$

$$= \frac{1+9}{64} + \frac{1}{16} = \frac{10}{64} + \frac{1}{16} = \frac{160+64}{1024} = \frac{224}{1024} = \frac{7}{32} = 0.21875$$

$$\text{مجموع مساحت‌های مستطیل‌های فوقانی} = f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \ \dots\ + f(x_n)\Delta x = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

$$= \frac{1}{16}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4} + \frac{9}{16}\cdot\frac{1}{4} + 1\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{64} + \frac{1}{16} + \frac{9}{64} + \frac{1}{4}$$

$$= \frac{1+9}{64} + \frac{4+16}{64} = \frac{10}{64} + \frac{20}{64} = \frac{10+20}{64} = \frac{30}{64} = \frac{15}{32}$$

$$= 0.46875$$

$$0.21875 < A < 0.46875$$

$$\left.\begin{array}{l}\int_a^b c\,dx\\ \int_a^b [f(x)\pm g(x)]\,dx\\ \int_a^a f(x)\,dx\end{array}\right\}=?$$

فصل چهارم

عنوان: خواص انتیگرال معین

صفحهٔ کتاب:(149- 150)

وقت تدریس: (سه ساعت درسی) ساعت اول درسی

اهداف آموزشی **- دانشی** **- مهارتی** **- ذهنیتی**	- شاگردان خواص انتیگرال معین را بدانند. - شاگردان خواص انتیگرال معین را از خواص انتیگرال غیر معین فرق کرده بتوانند. - شاگردان از حل سؤال ها و مثال های مربوط به خواص انتیگرال معین احساس خوشی نمایند.
روش های تدریس	سؤال وجواب ، کار گروهی و انفرادی
مواد ممد درسی	چارت شکل ورودی
توضیح ورودی **(5) دقیقه**	بعد از انجام کار های مقدماتی تدریس که بعد از داخل شدن به صنف برای هر معلم ضرور است به توضیح شکل ورودی درس جدید بپردازید؛ برای این کار چارت شکل ورودی را که از قبل آماده نموده اید، آنرا پیش روی صنف آویزان و در مورد آن از شاگردان بپرسید: - در شکل ورودی چی را می بینید؟ - با استفاده از خواص انتیگرال غیر معین که قبلاً مطالعه نموده اید بگویید که انتیگرال توابع داده شده مساوی به چیست؟ سعی نمایید تا جوابات قناعت بخش از شاگردان به دست آرید.

فعالیت جریان درس (28)دقیقه

شاگردان را به گروه‌های مناسب تقسیم و آنها را موظف سازید تا فعالیت صفحهٔ(149) کتاب درسی را انجام دهند.

در اثنای فعالیت از کار گروه‌ها نظارت کنید تا تمام اعضای گروه در انجام فعالیت سهیم باشند و اگر به مشکل روبرو می شوند آنها را رهنمایی کنید.

در اخیر فعالیت از نماینده هر گروه بخواهید تا به نماینده گی از گروه خود پیش روی تخته آمده و فعالیت گروه خود را به دیگران توضیح دهند و اگر در توضیح آنها اشتباهی وجود داشت آنها را رهنمایی کنید. در ختم فعالیت از جملهٔ 9 خاصیتی که از نتیجه آن به دست می آید، در این درس خاصیت های اول، دوم و سوم انتیگرال معین را ثبوت و مثال آنرا حل کنید.

حال رابطهٔ خاصیت اول انتیگرال معین را به روی تخته نوشته کرده، ثبوت و بعد مثال آنرا با استفاده از این خاصیت با سهم فعال شاگردان حل کنید.

اکنون رابطهٔ خاصیت دوم انتیگرال معین را به روی تخته بنویسید و از یک شاگرد بخواهید تا آنرا به روی تخته ثبوت و بعد مثال آنرا حل کند. همزمان از شاگردان دیگر بخواهید تا این کار را در کتابچه های شان به شکل انفرادی انجام دهند. زمانیکه مطمئن شدید که حل روی تخته کاملاً درست است. از سایر شاگردان بخواهید تا حل های شان را با حل روی تخته مقایسه و اگر دچار اشتباه شده باشند، آنرا اصلاح نمایند.

تحکیم درس (5) دقیقه:

برای اینکه شاگردان درس جدید را بهتر فرا گرفته باشند رابطهٔ خاصیت سوم انتیگرال معین را به روی تخته نوشته، ثبوت و بعد مثال آنرا با استفاده از این خاصیت حل کنید؛ طوریکه شاگردان نیز در حل آن سهیم باشند، یعنی در جریان ثبوت و حل مثال از شاگردان سؤال و جواب های قناعت بخش به دست آرید.

ارزیابی ختم درس (5) دقیقه

برای اینکه مطمئن شوید آیا شاگردان درس جدید را خوب دانستند یاخیر؟ توسط سؤالات؛ مانند: زیر آنها را ارزیابی کنید:

- امروز چند خاصیت انتیگرال معین را مطالعه نموده اید؟
- هر کدام این خاصیت ها را نام گرفته و رابطهٔ آنرا بنویسید.

جواب به سؤال های تمرین

انتیگرال های معین زیر را محاسبه کنید.

حل جز b):

$$\int_2^5 7x dx = ?$$

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$

$$\int_2^5 7x dx = 7\int_2^5 x dx = 7\left[\frac{x^2}{2}\right]_2^5 = 7\left[\frac{25}{2}-\frac{4}{2}\right] = 7\left[\frac{25-4}{2}\right] = 7\left[\frac{21}{2}\right] = \frac{147}{2} = 73.5$$

حل جزc):

$$\int_{-2}^4 (-x)dx = ?$$

$$\int_a^b -f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$$

$$\int_{-2}^4 (-x)dx = -\int_{-2}^4 x dx = -\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-2}^4 = -\left[\frac{16}{2}-\frac{4}{2}\right] = -\frac{16}{2}+\frac{4}{2} = \frac{-16+4}{2} = \frac{-12}{2} = -6$$

حل جزءd):

$$\int_1^3 \sqrt{x} dx = ?$$

$$\int_1^3 x^{\frac{1}{2}} dx = \left[\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right]_1^3 = \left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_1^3 = \frac{2}{3}\left[x^{\frac{3}{2}}\right]_1^3 = \frac{2}{3}\left[\sqrt{x^3}\right]_1^3 = \frac{2}{3}\left[\sqrt{3^3}-\sqrt{1^3}\right] = \frac{2}{3}\left[\sqrt{27}-1\right] = \frac{2}{3}\left[3\sqrt{3}-1\right] = 2\sqrt{3}-\frac{2}{3}$$

حل جزءe):

$$\int_{-2}^3 3x dx = ?$$

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx \Rightarrow \int_{-2}^3 3x dx = 3\int_{-2}^3 x dx = 3\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-2}^3 = 3\left[\frac{9}{2}-\frac{4}{2}\right] = 3\left[\frac{9-4}{2}\right] = 3\left[\frac{5}{2}\right] = \frac{15}{2} = 7.5$$

$$\left.\begin{array}{l}\int_a^b c\,dx \\ \int_a^b [f(x)\pm g(x)]\,dx \\ \int_a^a f(x)\,dx\end{array}\right\}=?$$

فصل: چهارم

عنوان: خواص انتیگرال معین

صفحهٔ کتاب:(150- 152)

وقت تدریس: ساعت دوم درسی

اهداف آموزشی **- دانشی** **- مهارتی** **- ذهنیتی**	- شاگردان خواص چهارم، پنجم و ششم انتیگرال معین را بدانند. - شاگردان خواص انتیگرال معین را بالای مثال ها تطبیق کرده بتوانند. - شاگردان به حل سؤال های خواص انتیگرال معین علاقه‌مند شوند.
روش های تدریس	سؤال وجواب ، کار انفرادی
مواد ممد درسی	چارت شکل ورودی
توضیح ورودی **(5) دقیقه**	بعد از انجام کار های مقدماتی تدریس که بعد از داخل شدن به صنف ضرور است به ارائهٔ درس جدید بپردازید؛ برای توضیح بخش ورودی این درس مانند ساعت قبلی چارت شکل ورودی را که از قبل تهیه نموده اید. یکبار دیگر آنرا پیش روی صنف آویزان و در مورد از شاگردان سؤال کنید تا دوباره حواس آنها به درس جدید معطوف گردد.

فعالیت جریان درس (28)دقیقه

رابطهٔ خاصیت چهارم و پنجم صفحهٔ(151) انتیگرال معین را با مثال های آنها به روی تخته بنویسید و از دو نفر شاگرد بخواهید تا به نوبت به روی تخته آمده؛ خاصیت مربوطه را ثبوت و مثال آنرا حل کنند.

در عین وقت از سایر شاگردان بخواهید تا این کار را در کتابچه های شان به شکل انفرادی انجام دهند. زمانیکه اطمینان حاصل نمودید که حل سؤال روی تخته کاملاً درست است از شاگردان دیگر بخواهید تا حل کتابچه های شان را با حل سؤال روی تخته مقایسه و اگر دچار اشتباهی شده بودند به آن پی برده و اصلاح نمایند.

تحکیم درس (5) دقیقه

برای اینکه شاگردان درس امروز را خوبتر بفهمند رابطهٔ خاصیت ششم صفحهٔ(152) انتیگرال معین را با استفاده از شکل به روی تخته ثبوت کرده، بعد مثال آنرا با سهم گیری فعال شاگردان حل کنید.

ارزیابی ختم درس (5) دقیقه:

برای اینکه مطمئن شوید که آیا شاگردان درس جدید را فرا بهترگرفته اند یاخیر؟ آنها را به شکل زیر ارزیابی کنید و از آنها بپرسید:

- چند خاصیت انتیگرال معین را تا به حال مطالعه نموده اید؟
- در کدام حالت یک انتیگرال، مساوی به صفر است؟

جواب به سؤال های تمرین

1- انتیگرال های معین زیر را محاسبه کنید.

حل جزء a):

$$\int_{-1}^{1}(x^3+2)dx=?$$

$$\int_a^b[f(x)+g(x)]dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx$$

$$\int_{-1}^{1}(x^3+2)dx=\int_{-1}^{1}x^3dx+\int_{-1}^{1}2dx=\left[\frac{x^4}{4}\right]_{-1}^{1}+[2x]_{-1}^{1}=\left[\frac{1}{4}-(\frac{1}{4})\right]+[2(1)-2(-1)]=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+2+2$$

$$=\frac{1-1}{4}+4=0+4=4$$

حل جزء f):

$$\int_{-1}^{2}(x^3-\frac{1}{2}x^4)dx=?$$

$$\int_a^b[f(x)-g(x)]dx=\int_a^b f(x)-\int_a^b g(x)dx$$

$$\int_{-1}^{2}(x^3-\frac{1}{2}x^4)dx=\int_{-1}^{2}x^3dx-\int_{-1}^{2}\frac{1}{2}x^4dx=\int_{-1}^{2}x^3dx-\frac{1}{2}\int_{-1}^{2}x^4dx$$

$$=\left[\frac{x^4}{4}\right]_{-1}^{2}-\frac{1}{2}\left[\frac{x^5}{5}\right]_{-1}^{2}=\left[\frac{(2)^4}{4}-\frac{(-1)^4}{4}\right]-\frac{1}{2}\left[\frac{(2)^5}{5}-\frac{(-1)^5}{5}\right]$$

$$=\left[\frac{16}{4}-\frac{1}{4}\right]-\frac{1}{2}[\frac{32}{5}-\frac{-1}{5}]=[\frac{16-1}{4}]-\frac{1}{2}\left[\frac{32+1}{5}\right]=\frac{15}{4}-\frac{1}{2}\left[\frac{33}{5}\right]$$

$$=\frac{15}{4}-\frac{33}{10}=\frac{150-132}{40}=\frac{18}{40}=0.45$$

حل جزء g):

$$\int_{-4}^{4}(2x^2-\frac{1}{8}x^4)\,dx=?$$

$$\int_{-4}^{4}(2x^2-\frac{1}{8}x^4)\,dx=\int_{-4}^{4}2x^2dx-\int_{-4}^{4}\frac{1}{8}x^4dx=2\int_{-4}^{4}x^2dx-\frac{1}{8}\int_{-4}^{4}x^4dx=2\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-4}^{4}-\frac{1}{8}\left[\frac{x^5}{5}\right]_{-4}^{4}$$

$$=2\left[\frac{(4)^3}{3}-\frac{(-4)^3}{3}\right]-\frac{1}{8}\left[\frac{(4)^5}{5}-\frac{(-4)^5}{5}\right]=2\left[\frac{64}{3}-\frac{-64}{3}\right]-\frac{1}{8}\left[\frac{1024}{5}-\frac{-1024}{5}\right]$$

$$=2\left[\frac{64}{3}+\frac{64}{3}\right]-\frac{1}{8}\left[\frac{1024}{5}+\frac{1024}{5}\right]=2\left[\frac{64+64}{3}\right]-\frac{1}{8}\left[\frac{1024+1024}{5}\right]$$

$$=2\left[\frac{128}{3}\right]-\frac{1}{8}\left[\frac{2048}{5}\right]=\frac{256}{3}-\frac{2048}{40}=\frac{10240-6144}{120}=\frac{4096}{120}=34.1\bar{3}$$

2- قیمت انتیگرال $\int_{-1}^{4} f(x)\,dx$ را دریابید، اگر $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 5$ و $\int_{1}^{4} f(x)dx = -2$ باشد.

حل:

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = 5 \quad , \quad \int_{1}^{4} f(x)dx = -2$$

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{a}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{b} f(x)dx$$

$$\int_{-1}^{4} f(x)dx = \int_{-1}^{1} f(x)dx + \int_{1}^{4} f(x)dx$$

حال به جای انتیگرال، قیمت آنرا وضع می‌کنیم:

$$\int_{-1}^{4} f(x)dx = 5 - 2$$

$$\int_{-1}^{4} f(x)dx = 3$$

فصل چهارم

عنوان: خواص انتیگرال معین

صفحهٔ کتاب:(153– 156)

وقت تدریس: ساعت سوم درسی

اهداف آموزشی **- دانشی** **- مهارتی** **- ذهنیتی**	- شاگردان خواص هفتم، هشتم و نهم انتیگرال معین را بدانند - شاگردان این خواص را بالای مثال ها تطبیق کرده بتوانند. - شاگردان به ثبوت و حل مثال های خواص انتیگرال معین علاقه‌مند شده و احساس خوشی نمایند.
روش های تدریس	سؤال وجواب ، کار انفرادی
مواد ممد درسی	بکس هندسی
توضیح ورودی **(5) دقیقه**	بعد از انجام کار های مقدماتی تدریس که بعد از داخل شدن به صنف برای هر معلم ضرور است به ارائهٔ درس جدید بپردازید؛ برای این کار از شاگردان به ارتباط درس جدید از دروس قبلی چند سؤال حسب ذیل بپرسید: - اعظمی واصغری مطلق یعنی چه؟ - قضیهٔ قیمت متوسط در مشتق چی را بیان می کند؟ سعی کنید تا با استفاده از آموخته های قبلی ذهن آنها را به گرفتن درس جدید معطوف سازید.

فعالیت جریان درس (28)دقیقه

رابطه خاصیت هفتم صفحهٔ(153) انتیگرال معین را با مثال آن به روی تخته بنویسید. نخست رابطهٔ آنرا با سهم گیری شاگردان ثبوت؛ سپس مثال آنرا حل کنید. یعنی در جریان کار از شاگردان سؤال و جواب های درست حاصل نمایید.

نوت: در حل مثال در کتاب اشتباه صورت گرفته، آن را طور زیر حل نمایید.

$$(b-a)-\frac{1}{12}(b^3-a^3)\leq(b-a)+\frac{1}{6}(b^3-a^3)\quad \ldots\ /\div(b-a)$$

$$1-\frac{1}{12}(b^2+ab+a^2)\leq 1+\frac{1}{6}(b^2+ab+a^2)\quad \ldots\ /\div(b^2+ab+a^2)$$

$$-\frac{1}{12}\leq\frac{1}{6}$$

اکنون رابطه خاصیت هشتم صفحهٔ(154) انتیگرال معین را همراه با مثال آن به روی تخته نوشته و از یک شاگرد بخواهید تا این خاصیت را به کمک شکل توضیح داده، ثبوت و بعد مثال آنرا حل کند. در عین وقت از سایر شاگردان بخواهید تا این کار را در کتابچه های شان به شکل انفرادی انجام دهند. اگر در حل سؤال روی تخته مشکلی وجود داشت از یک شاگرد داوطلب بخواهید تا آنرا اصلاح کند. زمانیکه مطمئن شدید حل سؤال روی تخته کاملاً درست است از شاگردان دیگر بخواهید تا حل شان را با حل سؤال روی تخته مقایسه نمایند تا آنعده شاگردانی که دچار اشتباه شده اند آنرا اصلاح کنند.

تحکیم درس (7) دقیقه

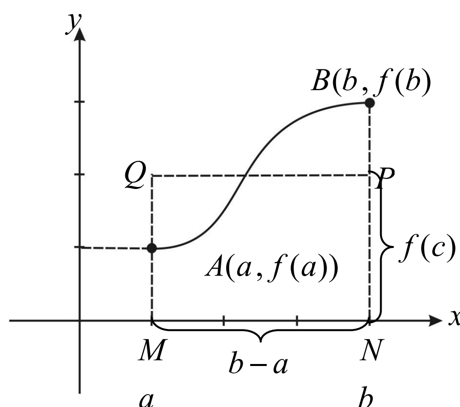
برای اینکه شاگردان درس جدید را بهتر درک کنند، شکل خاصیت نهم انتیگرال معین را به روی تخته رسم بعد خاصیت مذکور را با استفاده از شکل به روی تخته ثبوت و بعد مثال آنرا حل کنید، طوریکه شاگردان در ثبوت و حل مثال سهم فعال داشته باشند.

ارزیابی ختم درس (5) دقیقه

برای اینکه مطمئن شوید آیا شاگردان درس امروز را فرا گرفته اند یاخیر؟ آنها را ارزیابی کنید؛ مانند زیر:

- انتیگرال معین دارای چند خواص است؟
- کدام رابطه به نام رابطهٔ قضیهٔ تخمین یاد می گردد؟
- رابطهٔ قضیهٔ قیمت متوسط را به روی تخته بنویسید.

معلومات اضافی



تعبیر هندسی قضیهٔ قیمت متوسط: اگر تابع $f(x)$ به شرطیکه $f(x)\ge 0$ در انتروال $[a,b]$ متمادی باشد، از روی شکل $\int_a^b f(x)\,dx$ مساحت ساحهٔ که بین منحنی $f(x)$، محور x، خطوط $x=a$ و $x=b$ قرار دارد نشان میدهیم.

چون شکل $MNPQ$ یک مستطیل را نشان میدهد که طول آن $(b-a)$ و عرض آن $f(c)$ می‌باشد، که مساحت مستطیل مذکور مساوی است به: $\int_a^b f(x)\,dx=(b-a)\,f(c)$

از اینجا نتیجه گرفته می‌شود که مساحت بین منحنی و محور x و دو خط $x=a$ و $x=b$ برابر مساحت مستطیل است.

جواب به سؤال های تمرین:

3- تابع $f(x)=x$ را در انتروال $[0,2]$ در نظر گرفته و از آن قیمت c را دریابید.

حل: $\int_0^2 xdx=\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2=\frac{4}{2}-\frac{0}{2}=\frac{4}{2}=2 \quad , \quad f(x)=x$

چون تابع $f(x)=x$ است، اگر به عوض x قیمت c را در تابع وضع کنیم داریم که:

$$f(x)=x \quad , \quad f(c)=c$$

اکنون در رابطهٔ مقابل قیمت‌های دریافت شده را وضع می‌کنیم؛ می یابیم که: $\int_a^b f(x)dx=f(c)(b-a)$

$$\int_0^2 xdx=c(2-0)$$

$$2=c(2-0)$$

$$2=2c \Rightarrow \boxed{c=1}$$

$$k=f(c) \ , \ f(c)=c=1 \Rightarrow f(c)=1 \ , \ k=1$$

$$a<c<b \Rightarrow 0<1<2$$

$$S(t) = v_0 \cdot t$$

فصل: چهارم

عنوان: قضایای اساسی مشتق و انتیگرال

صفحۀ کتاب:(157– 158)

وقت تدریس:(2 ساعت درسی) ساعت اول درسی

اهداف آموزشی **- دانشی** **- مهارتی** **- ذهنیتی**	- شاگردان مفهوم قضایای اساسی مشتق و انتیگرال را بدانند. - شاگردان مثال های مربوط به قضیۀ اول را حل کرده بتوانند. - شاگردان از حل مثال ها و سؤال‌های قضیۀ اول احساس خوشی نمایند.
روش های تدریس	سؤال وجواب ، کار گروهی و انفرادی
مواد ممد درسی	چارت شکل ورودی
توضیح ورودی **(5) دقیقه**	کار های مقدماتی تدریس که بعد از داخل شدن به صنف ضرور است انجام دهید؛ سپس به توضیح شکل ورودی درس جدید بپردازید؛ برای این کار چارتی را که از قبل تهیه نموده اید آنرا پیش روی صنف آویزان و در مورد شکل از شاگردان سؤال کنید: - در شکل ورودی چی را می بینید؟ - این معادله را در فزیک به نام معادله چی یاد می کنند؟ - در این معادله v_0 و t مخفف کدام کلمه انگلیسی هستند؟ در صورتیکه شاگردان جواب های قناعت بخش ارائه کردند. شما سؤال ورودی را به آنها بدهید که با استفاده از فارمول آنرا محاسبه کنند.

فعالیت جریان درس (28)دقیقه

شاگردان را به گروه های مناسب تقسیم و آنها را موظف سازید تا فعالیت صفحۀ(157) کتاب درسی را در گروه های مربوطه شان انجام دهند.

در اثنای اجرای فعالیت از کار گروه ها مشاهده و کنترول نمایید تا تمام اعضای گروه در انجام فعالیت سهیم باشند و در صورت بروز مشکل آنها را رهنمایی کنید.

در اخیر فعالیت از نمایندۀ تمام گروه ها در صورت موجودیت وقت بخواهید تا پیش روی تخته آمده و کار گروهی خویش را به دیگران توضیح دهند.

در ختم فعالیت، قضیه‌یی که از نتیجۀ آن به دست آمده آنرا به روی تخته نوشته ، بعد آنرا با سهم گیری فعال شاگردان ثبوت کنید.طوریکه از شاگردان در وقت ثبوت، سؤال و جواب های قناعت بخش به دست آرید.

حال مثال صفحۀ(158) کتاب درسی را که مربوط این ثبوت است به روی تخته بنویسید و از یک شاگرد بخواهید تا آنرا به روی تخته حل کند. همزمان از سایر شاگردان بخواهید تا مثال مذکور را در کتابچه های شان به شکل انفرادی

حل کنند، اگر در حل سؤال روی تخته غلطی وجود داشت از یک شاگرد داوطلب بخواهید تا آنرا اصلاح کند، وقتی مطمئن شدید حل سؤال روی تخته کاملاً درست است. از سایر شاگردان بخواهید تا حل کتابچه های شان را با حل سؤال روی تخته مقایسه و اگر اشتباه کرده باشند آنرا اصلاح کنند.

تحکیم درس (7) دقیقه

برای اینکه شاگردان مفهوم درس جدید را خوبتر درک کنند جزء (a) سؤال سوم تمرین صفحهٔ(160) کتاب درسی را به روی تخته نوشته کرده بعد آنرا با سهم فعال شاگردان حل کنید.

ارزیابی ختم درس (5) دقیقه

برای اینکه اطمینان خاطر حاصل نمایید که آیا شاگردان درس جدید را درک نموده اند یاخیر؟ آنها را به طور مختصر توسط چند سؤال ارزیابی کنید؛ طور مثال:

- قضیهٔ اول اساسی مشتق و انتیگرال چی را بیان می کند؟
- برای دریافت مشتق یک تابع اولیه از کدام رابطه استفاده می گردد؟

معلومات اضافی

طوریکه می دانید نیوتن و لایبنیز مخترعین حساب دیفرانسیل و انتیگرال به شمار می روند؛ اما بر اساس اطلاعات موجود در رابطه به مشتق و انتیگرال و به طور خاص قضیهٔ اساسی مشتق وانتیگرال، این سؤال مطرح است که چرا این دو ریاضیدان بزرگ به عنوان بنیانگذاران این شاخهٔ از دانش بشر مشهور شده اند، در حالی که خیلی قبل از آنها، نحوهٔ محاسبهٔ میل مماس در منحنی ها رایج بوده است که حتی ارشمیدس هم قادر بود مساحت ناحیه های که با منحنی های خاص محصور می شدند حساب کند. باید خاطر نشان نمود که تاریخچهٔ قضیهٔ اساسی مشتق و انتیگرال نیز به قبل از زمان لایبنیز و نیوتن می رسد.

بارو معلم نیوتن در پوهنتون کمبریج، بدون اطلاع از مفهوم دقیق مشتق و انتیگرال، یک قضیهٔ هندسی معادل به قضیهٔ اساسی را بیان و اثبات کرده است.آنچه که باعث شده این دو نفر را به عنوان پایه گذاران این علم بشناسند، درک آنها از نیاز بشر به وجود یک روش سیستماتیک برای مشتق گیری و انتیگرال گیری و نیز به کار گیری علامات رایج و بیان استدلال های منطقی به جای اثبات های شهودی است.

جواب به سؤال های تمرین

1- مشتق های زیر را پیدا کنید.

$$a)\ F(t)=\int_{\sin t}^{\cos t}\frac{1}{4-x^2}dx \qquad b)\ F(t)=\int_{0}^{\cos t}\frac{1}{4-x^2}dx$$

$$c)\ F(t)=\int_{-\pi}^{t}\frac{\cos y}{1+y^2}dy \qquad d)\ F(x)=\int_{1}^{x}\frac{\sin t}{t}dt$$

حل جزءa) چون $F'(x)=\int_{v(x)}^{d(x)}f(t)\,dt=f(u)u'(x)-f(v)v'(x)$ است؛ پس:

$$F'(t)=\frac{1}{4-(\cos t)^2}(\cos t)'-\frac{1}{4-(\sin t)^2}(\sin t)=\frac{-\sin t}{4-\cos^2 t}-\frac{\cos t}{4-\sin^2 t}$$

حل جزءb)

$$F(t)=\int_{0}^{\cos t}\frac{1}{4-x^2}\,dx$$

$$F(x)=\int_{a}^{x}f(t)dt \qquad \text{یا} \qquad F(t)=\int_{a}^{g(t)}f(x)dx$$

$$g(t)=\cos t$$

$$f(x)=\frac{1}{4-x^2}$$

$$F'(t)=f(g(t))\cdot g'(t) \;\Rightarrow\; F'(t)=\frac{1}{4-(\cos t)^2}\cdot(\cos t)'$$

$$F'(t)=\frac{1}{4-(\cos t)^2}\cdot(-\sin t)=\frac{-\sin t}{4-(\cos t)^2} \;\Rightarrow\; F'(t)=\frac{-\sin t}{4-\cos^2 t}$$

حل جزءc)

$$F(t)=\int_{-\pi}^{t}\frac{\cos y}{1+y^2}dy$$

$$g(t)=t$$

$$f(y)=\frac{\cos y}{1+y^2}$$

$$F'(t)=f(g(t))\cdot g'(t) \;\Rightarrow\; F'(t)=\frac{\cos t}{1+t^2}\cdot(t)' \;\Rightarrow\; F'(t)=\frac{\cos t}{1+t^2}$$

حل جزءd)

$$F(x)=\int_{1}^{x}\frac{\sin t}{t}dt$$

$$g(x)=x$$

$$f(t)=\frac{\sin t}{t}$$

$$F'(x)=f(g(x))\cdot g'(x) \;\Rightarrow\; F'(x)=\frac{\sin x}{x}\cdot(x)' \;\Rightarrow\; F'(x)=\frac{\sin x}{x}$$

$$S(t) = v_0 \cdot t$$

فصل چهارم

عنوان: قضایای اساسی مشتق و انتیگرال

صفحهٔ کتاب:(157- 158)

وقت تدریس: ساعت دوم درسی

اهداف آموزشی **- دانشی** **- مهارتی** **- ذهنیتی**	- شاگردان مفهوم قضیهٔ دوم اساسی مشتق و انتیگرال را بدانند. - شاگردان مثال های مربوط به قضیهٔ دوم را حل کرده بتوانند. - شاگردان به حل مثال‌ها و سؤال های قضیهٔ دوم علاقه‌مند شده وآنرا در زنده‌گی روزمره به کار ببرند.
روش های تدریس	سؤال وجواب، تشریح و کار انفرادی
مواد ممد درسی	چارت شکل ورودی
توضیح ورودی **(5) دقیقه**	بعد از انجام کار های مقدماتی تدریس که بعد از داخل شدن به صنف برای هر معلم ضرور است. مانند ساعت قبلی چارت شکل ورودی را که از قبل تهیه نموده اید یکبار دیگر آنرا پیش روی صنف آویزان و از شاگردان در مورد شکل چارت سؤال کنید و جواب های قناعت بخش به دست آرید، همچنان در جریان این کار کوشش نمایید تا آنها درس روز گذشته را به خاطر آورده و کاملاً آمادهٔ درس جدید شوند.

فعالیت جریان درس (28)دقیقه

قضیهٔ دوم اساسی مشتق و انتیگرال را با رابطهٔ آن که در صفحهٔ(159) کتاب درسی موجود است به روی تخته بنویسید و آنرا با سهم فعال شاگردان قدم به قدم ثبوت و تشریح نمایید، قسمیکه در جریان ثبوت از شاگردان سؤال و در مقابل، جواب های قناعت بخش به دست آرید.

اکنون مثال صفحهٔ(160) کتاب درسی را به روی تخته نوشته و از یک شاگرد بخواهید تا آنرا به روی تخته حل کند. همزمان از سایر شاگردان بخواهید تا این کار را به شکل انفرادی در کتابچه های شان انجام دهند. اگر در حل سؤال روی تخته اشتباهی موجود بود از یک شاگرد داوطلب بخواهید تا آنرا اصلاح کند وقتی مطمئن شدید حل سؤال روی تخته کاملاً درست است به شاگردان دیگر اجازه بدهید که حل شان را با حل سؤال روی تخته مقایسه و اگر دچار اشتباهی شده باشند آنرا اصلاح کنند.

تحکیم درس (7) دقیقه

برای اینکه شاگردان به مفهوم قضیه خوبتر پی برده باشند؛ سؤال سوم تمرین صفحه (160) کتاب درسی را به روی تخته بنویسید و به کمک شاگردان آنرا حل کنید.

ارزیابی ختم درس (5) دقیقه

برای اینکه مطمئن شوید آیا شاگردان درس جدید را فرا گرفته اند یاخیر؟ طور مختصر چند سؤال را از آنها بپرسید؛

طور مثال:

- قضایای اساسی مشتق وانتیگرال به چند نوع است؟
- قضیه دوم اساسی مشتق و انتیگرال چی را بیان می کند؟

کدام رابطه به نام رابطه نیوتن" لایبنیز" معروف است

معلومات اضافی

اسحاق نیوتن و گوتفرید و یلهم لایبنیز تشخیص دادند که به کمک قضیهٔ اساسی مشتق و انتیگرال می توان انتیگرال توابع مختلف را به دست آورد. علاوه بر آن، این دو دانشمند قوانینی را برای مشتق و انتیگرال ترکیب توابع کشف کردند.

نیوتن در اواسط دههٔ(1660) به این افکار پی برد، در حالی که لایبنیز کار خود را از اوایل دههٔ(1670) آغاز کرد. اما لایبنیز آنها را زود تر به چاپ رسانید و علامتگذاری های او بسیار جالبتر از علامتگذاری های نیوتن بود. این ها همان علایمی هستند که در حال حاضر هم به کار می روند.

در اخیر باید گفت که آنها پلی استواری بین ایده های قبلی و روشهای مدرن در رابطه به این دانش را بنا نهاده اند.

جواب به سؤال های تمرین:

2- اگر در تابع $f(t)=t$ ، $F(a)=F(0)=2$ باشد، قیمت $F(b)$ را در نقاط $b=1,\ldots,0.2,0.4,0$ پیدا کنید.

حل:

$$f(t)=t$$
$$F(0)=2$$
$$F(b)=? \qquad b=1,\ldots,0.2,0.4,0$$
$$F(a)=F(0)=2$$
$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$$

در این رابطه قیمت می گذاریم:

$$\int_0^b tdt=F(b)-F(0)$$
$$\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^b=F(b)-2$$
$$\frac{1}{2}b^2-0=F(b)-2$$
$$F(b)=2+\frac{1}{2}b^2$$

حال قیمت های $b=1,\ldots,0.4,0.2,0$ را در رابطهٔ بالا وضع می کنیم:

$$F(b) = 2 + \frac{1}{2}b^2 \qquad \boxed{b = 0}$$

$$F(0) = 2 + \frac{1}{2} \cdot 0 = 2 + 0 = 2$$

$$F(0.2) = 2 + \frac{1}{2}(0.2)^2 \qquad \boxed{b = 0.2}$$

$$= 2 + \frac{1}{2}(0.04) = 2 + 0.02 = 2.02$$

$$F(0.4) = 2 + \frac{1}{2}(0.4)^2 \qquad \boxed{b = 0.4}$$

$$= 2 + \frac{1}{2}(0.16) = 2 + 0.08 = 2.08$$

$$F(0.6) = 2 + \frac{1}{2}(0.6)^2 \qquad \boxed{b = 0.6}$$

$$= 2 + \frac{1}{2}(0.36) = 2 + 0.18 = 2.18$$

$$F(0.8) = 2 + \frac{1}{2}(0.8)^2 \qquad \boxed{b = 0.8}$$

$$= 2 + \frac{1}{2}(0.64) = 2 + 0.32 = 2.32$$

$$F(1) = 2 + \frac{1}{2}(1)^2 \qquad \boxed{b = 1}$$

$$= 2 + \frac{1}{2} = \frac{4+1}{2} = \frac{5}{2} = 2.5$$

حال برای آسانی کار جدول قیمت‌های دریافت شده را ترتیب می‌کنیم:

b	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
$F(b)$	2	2.02	2.08	2.18	2.32	2.5

3- $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, dx$ را پیدا کنید.

حل:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = -[\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\left[\cos\frac{\pi}{2} - \cos 0\right] = -[0-1] = 1$$

$$\int 2x\sqrt{1+x^2}\ dx$$

فصل چهارم

عنوان: انتیگرال گیری به طریقهٔ تعویض

صفحهٔ کتاب:(161- 162)

وقت تدریس: (دو ساعت درسی)ساعت اول درسی

اهداف آموزشی **- دانشی** **- مهارتی** **- ذهنیتی**	- شاگردان انتیگرال گیری به طریقهٔ تعویض را بدانند. - شاگردان مثال های مربوط به انتیگرال معین را به طریقهٔ تعویض حل کرده بتوانند. - شاگردان به حل سؤال‌ها و مثال‌های مربوط به انتیگرال معین به طریقه تعویضی علاقه‌مند شده، احساس خوشی نمایند.
روش های تدریس	سؤال وجواب، کار گروهی و انفرادی
مواد ممد درسی	چارت شکل ورودی
توضیح ورودی **(5) دقیقه**	نخست کارهای مقدماتی تدریس که بعد از داخل شدن به صنف ضرور است انجام دهید. بعد به ارائهٔ درس جدید بپردازید؛ طوریکه ابتدا ضرور است شکل ورودی را توضیح کنید. برای این کار چارت ورودی را که از قبل تهیه نموده اید آنرا پیش روی صنف آویزان و در مورد از شاگردان طور زیر سؤال کنید: در ورودی چی را می بینید؟ - آیا می توانید این انتیگرال را با استفاده از خواص انتیگرال غیر معین حل کنید؟ - افادهٔ تحت جذر را به متحول دیگر تعویض و انتیگرال آنرا حساب کنید. - این طریقهٔ تعویض را در انتیگرال‌ها به نام چی یاد می کنند؟ سعی نمایید تا از شاگردان جواب‌های کاملاً درست به دست آید. در غیر آن خود جواب های آنها را تصحیح و افادهٔ تحت جذر را تعویض و قیمت انتیگرال آن را محاسبه کنید: $\int 2x\sqrt{1+x^2}\ dx = ?$ **حل:** ابتدا افادهٔ تحت جذر را به u وضع کنیم: $1+x^2=u \ \Rightarrow\ 2xdx=du$ $\int 2x\sqrt{1+x^2dx}=\int\sqrt{u}du=\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}+1}+C=\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+C$ $=\frac{2}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}}+C=\frac{2}{3}\sqrt{(1+x^2)^3}+C$

فعالیت جریان درس(28)دقیقه شاگردان را به گروه‌های مناسب تقسیم و آنها را موظف سازید تا فعالیت صفحهٔ(161) مربوط این درس را در گروه ها انجام دهند.

در جریان کار گروهی از فعالیت گروه ها نظارت به عمل آرید و اگر مشکلی داشتند آنها را رهنمایی کنید. در اخیر فعالیت از نمایندهٔ تمام گروه ها در صورت داشتن وقت بخواهید تا فعالیتی را که در گروه انجام داده اند به دیگران توضیح نمایند.

در اخیر فعالیت، نتیجهٔ فعالیت به دست آمده را به شاگردان تشریح بعد رابطه آنرا به روی تخته بنویسید و توضیح نمایید.

اکنون مثال 1 صفحهٔ(161) مربوط این درس را به روی تخته نوشته و از یک شاگرد بخواهید تا آنرا به روی تخته حل کند.همزمان از شاگردان دیگر بخواهید تا مثال مذکور را به شکل انفرادی در کتابچه های شان حل نمایند. اگر در حل سؤال روی تخته اشتباهی موجود بود از یک شاگرد داوطلب بخواهید تا آنرا اصلاح کند، زمانیکه مطمئن شدید حل روی تخته کاملاً درست است. به شاگردان هدایت دهید تا سؤال حل شدهٔ کتابچه‌های شان را با سؤال حل شدهٔ روی تخته مقایسه کنند.

تحکیم درس (7) دقیقه

برای اینکه شاگردان درس امروز را خوبتر فرا گرفته باشند، مثال(2) صفحه (162) کتاب درسی را به روی تخته بنویسید و حل کنید، قسمیکه شاگردان در حل مثال سهم فعال داشته باشند.

ارزیابی ختم درس (5) دقیقه:

برای اینکه خود را مطمئن سازید آیا شاگردان درس ارائه شده را درست فهمیده اند یاخیر؟ در مورد طور زیر چند سؤال کنید:

- کلمه تعویض یعنی چه؟
- چطور یک انتیگرال را مشخص کنیم که تعویضی است؟
- برای محاسبه یک انتیگرال معین به طریقهٔ تعویض کدام مراحل باید در نظر گرفته شود؟ بیان دارید.

جواب به سؤال های تمرین

انتیگرال های زیر را توسط طریقهٔ تعویضی محاسبه کنید:

حل جزء b):

$$\int_1^2 x\sqrt{x-1}\,dx = ?$$

$$u=\sqrt{x-1}\ ,\quad u^2 = x-1 \Rightarrow u^2+1 = x \quad , \quad 2udu = dx$$

$$\begin{cases} x=1 \\ u^2 = x-1 = 1-1 = 0 \Rightarrow \quad u=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=2 \\ u^2 = x-1 = 2-1 = 1 \Rightarrow \quad u=1 \end{cases}$$

$$\int_1^2 x\sqrt{x-1}\,dx = \int_0^1 (u^2+1)u\cdot 2udu = \int_0^1 (u^3+u)\cdot 2udu = \int_0^1 (2u^4+2u^2)du = \int_0^1 2u^4du + \int_0^1 2u^2du$$

$$= 2\left[\frac{u^5}{5}\right]_0^1 + 2\left[\frac{u^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{5}\left[1^5-0^5\right] + \frac{2}{3}\left[1^3-0^3\right] = \frac{2}{5}+\frac{2}{3} = \frac{6+10}{15} = \frac{16}{15}$$

حل جزءc):

$$\int_0^7 \sqrt{4+3x}\,dx = ?$$

$$u = 4+3x \quad , \quad du = 3dx \;\Rightarrow\; dx = \frac{1}{3}du$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ u = 4+3x = 4+3\cdot 0 = 4 \;\Rightarrow\; u = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 7 \\ u = 4+3x = 4+3\cdot 7 = 4+21 = 25 \;\Rightarrow\; u = 25 \end{cases}$$

$$\int_0^7 \sqrt{4+3x}\,dx = \int_4^{25} \sqrt{u}\cdot\frac{1}{3}du = \frac{1}{3}\int_4^{25}\sqrt{u}du = \frac{1}{3}\int_4^{25} u^{\frac{1}{2}}du = \frac{1}{3}\left[\frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right]_4^{25} = \frac{1}{3}\left[\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_4^{25} = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\left[u^{\frac{3}{2}}\right]_4^{25}$$

$$= \frac{2}{9}\left[\sqrt{u^3}\right]_4^{25} = \frac{2}{9}\left[\sqrt{(25)^3} - \sqrt{(4)^3}\right] = \frac{2}{9}\left[\sqrt{15625} - \sqrt{64}\right] = \frac{2}{9}[125-8] = \frac{2}{9}\cdot 117$$

$$= \frac{234}{9} = 26$$

حل جزءf)

$$\int_0^5 \frac{xdx}{x^2+10} = ?$$

$$u = x^2+10 \quad , \quad du = 2xdx \;\Rightarrow\; xdx = \frac{1}{2}du$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ u = x^2+10 = 0^2+10 = 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 5 \\ u = x^2+10 = 5^2+10 = 25+10 = 35 \end{cases}$$

$$\int_0^5 \frac{xdx}{x^2+10} = \int_{10}^{35} \frac{1}{u}\cdot\frac{1}{2}du = \frac{1}{2}\int_{10}^{35}\frac{du}{u} = \frac{1}{2}[Lnu]_{10}^{35}$$

$$= \frac{1}{2}(\ln 35 - \ln 10) = \frac{1}{2}\ln(\frac{35}{10}) = \frac{1}{2}\ln\frac{7}{2} = \frac{1}{2}\ln(3.5) \approx 0.27705$$

$$\int 2x\sqrt{1+x^2}\ dx$$

فصل چهارم

عنوان: انتیگرال گیری به طریقهٔ تعویض

صفحهٔ کتاب:(162– 163)

وقت تدریس: ساعت دوم درسی

اهداف آموزشی **- دانشی** **- مهارتی** **- ذهنیتی**	- شاگردان انتیگرال گیری به طریقهٔ تعویض را بدانند. - شاگردان سؤال‌های مربوط به انتیگرال غیر معین را به طریقهٔ تعویض حل کرده بتوانند. - شاگردان از حل سؤال ها و مثال های مربوط به انتیگرال غیر معین به طریقهٔ تعویضی احساس خوشی نمایند.
روش های تدریس	کار گروهی و انفرادی، سؤال وجواب
مواد ممد درسی	چارت شکل ورودی
توضیح ورودی **(5) دقیقه**	بعد از انجام کار های مقدماتی تدریسی؛ مانند: ساعت قبلی ابتدا چارت را که به ارتباط شکل ورودی این درس از قبل تهیه نموده اید، یکبار دیگر آنرا پیش روی صنف آویزان و توضیح نمایید تا ذهنیت شاگران به درس جدید منسجم گردد.

فعالیت جریان درس (28)دقیقه

شاگردان را به گروه‌های مناسب تقسیم و به آنها وظیفه دهید تا فعالیت صفحهٔ(162) کتاب درسی را با مشورهٔ یکدیگر انجام دهند.

در اثنای اجرای فعالیت از گروه‌ها نظارت و کنترول کنید، در ختم فعالیت از نمایندهٔ هر گروه بخواهید تا با در نظر داشت وقت پیش‌روی تخته آمده و کار گروهی خویش را به دیگران توضیح نماید؛ اگر در جریان توضیح به اشتباهی روبرو می شود. وی را رهنمای کنید. تا نتیجهٔ مطلوب به دست آید.

در اخیر فعالیت نتیجهٔ که از آن به دست می‌آید آنرا توضیح داده و بعد رابطهٔ آنرا به روی تخته بنویسید و شاگردان را تفهیم نمایید.

اکنون مثال سوم صفحهٔ(163) کتاب درسی را به روی تخته بنویسید و از شاگردان بخواهید تا به شکل انفرادی مثال را در کتابچه های شان حل و در عین وقت از یک شاگرد دیگر بخواهید تا آنرا به روی تخته حل نماید؛ اگر در حل سؤال روی تخته مشکلی وجود داشت از یک شاگرد داوطلب بخواهید تا آنرا اصلاح کند. زمانیکه مطمئن شدید که حل سؤال روی تخته کاملاً درست است. از سایر شاگردان بخواهید تا حل کتابچه های شان را با حل روی تخته مقایسه کنند. این کار به شاگردانی که در حل سؤال اشتباه نموده اند کمک می کند تا به غلطی‌های شان پی برده و آنرا اصلاح کنند.

تحکیم درس (7) دقیقه

برای اینکه شاگردان درس ارائه شده را بهتر درک نموده باشند، مثال(4) صفحهٔ(163) کتاب درسی را به روی تخته طوری حل نمایید که شاگردان نیز در حل آن فعالانه سهم بگیرند.

ارزیابی ختم درس (5) دقیقه

با طرح نمودن سؤال‌های زیر از درس جدید و اخذ جوابات قناعت بخش، خود را مطمئن سازید آیا شاگردان درس را فرا گرفته اند یاخیر؟ طور مثال:

- آیا می‌توان انتیگرال غیر معین را به طریقهٔ تعویض، حل کرد؟
- رابطهٔ انتیگرال گیری غیر معین به طریقهٔ تعویض را به روی تخته بنویسید.

مراحل انتیگرال گیری غیر معین به طریقهٔ تعویض را بیان دارید.

معلومات اضافی

سؤال: قیمت $\int \frac{(\ln x)^2}{x}dx$ را محاسبه کنید.

حل: برای حل این سؤال از طریقهٔ تعویض استفاده می کنیم در این صورت داریم که:

$$u = \ln x \quad , \quad du = \frac{1}{x}dx$$

$$\int \frac{(\ln x)^2}{x}dx = \int u^2 du = \frac{u^3}{3} + C = \frac{1}{3}u^3 + C = \frac{1}{3}(\ln x)^3 + C$$

جواب به سؤال های تمرین

انتیگرال های زیر را توسط طریقهٔ تعویضی محاسبه کنید:

حل جزءa): اگر $u = 3x$ وضع شود، داریم که:

$$\int \cos 3x dx = ?$$

$$u = 3x \quad , \quad du = 3dx \;\Rightarrow\; dx = \frac{1}{3}du$$

$$\int \cos 3x dx = \int \cos u \cdot \frac{1}{3}du = \frac{1}{3}\int \cos u du = \frac{1}{3}\sin u + C = \frac{1}{3}\sin 3x + C$$

حل جزءd):

$$\int 2 \cdot \sqrt[5]{(1-4x)^2}\,dx = ?$$

$$u = 1-4x \quad , \quad du = -4dx \;\Rightarrow\; dx = -\frac{1}{4}du$$

$$\int 2 \cdot \sqrt[5]{(1-4x)^2}\,dx = 2\int \sqrt[5]{u^2} \cdot (-\frac{1}{4})du = -\frac{2}{4}\int u^{\frac{2}{5}}du = -\frac{1}{2}\left[\frac{u^{\frac{2}{5}+1}}{\frac{2}{5}+1}\right] + C = -\frac{1}{2}\left[\frac{u^{\frac{7}{5}}}{\frac{7}{5}}\right] + C$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{7}\left[\sqrt[5]{u^7}\right] + C = -\frac{5}{14}\sqrt[5]{(1-4x)^7} + C$$

حل جزء(e):

$$\int 2x(x^2+3)^4 dx = ?$$

$$u = x^2+3 \quad , \quad du = 2xdx$$

$$\int (x^2+3)^4 \cdot 2xdx = \int u^4 \cdot du = \frac{u^5}{5} + C = \frac{1}{5}u^5 + C = \frac{1}{5}(x^2+3)^5 + C$$

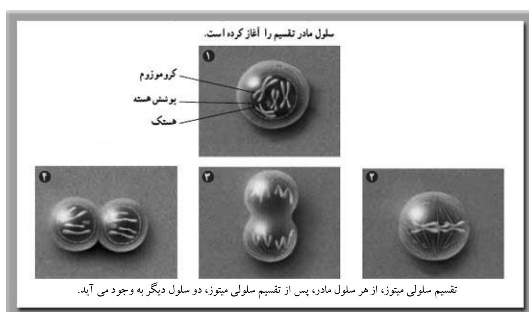
حل جزء(g):

$$\int \sqrt{\cos x}\sin x dx = ?$$

$$u = \cos x \quad , \quad du = -\sin x dx \Rightarrow \; -du = \sin x dx$$

$$\int \sqrt{\cos x}\sin x dx = \int \sqrt{u}(-du) = -\int u^{\frac{1}{2}} du = -\frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = -\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = -\frac{2}{3}\sqrt{u^3} + C$$

$$= -\frac{2}{3}\sqrt{\cos x} + C$$



تقسیم سلولی میتوز، از هر سلول مادر، پس از تقسیم سلولی میتوز، دو سلول دیگر به وجود می آید.

فصل چهارم

عنوان: انتیگرال های قسمی

صفحۀ کتاب:(165- 166)

وقت تدریس: یک ساعت درسی

اهداف آموزشی **- دانشی** **- مهارتی** **- ذهنیتی**	- شاگردان مفهوم انتیگرال قسمی را بدانند. - شاگردان سؤال های انتیگرال معین و غیر معین را توسط انتیگرال گیری قسمی حل کرده بتوانند. - شاگردان به حل سؤال‌های انتیگرال‌ها توسط روش قسمی علاقه‌مند شده و آنرا در زنده‌گی روزمرۀ خود به کار برند.
روش های تدریس	سؤال وجواب ، کار گروهی و انفرادی
مواد ممد درسی	چارت شکل ورودی
توضیح ورودی **(5) دقیقه**	کار های مقدماتی که بعد از داخل شدن به صنف برای هر معلم ضرور است انجام دهید. بعد به ارائه درس جدید بپردازید؛ ابتدا شکل ورودی را توضیح نمایید برای این کار چارت را که به ارتباط شکل ورودی این درس از قبل آماده نموده ایدآنرا پیش روی صنف آویزان و از شاگردان سؤال کنید: - در شکل روی چارت چی را می بینید؟ - یک حجره از چند قسمت تشکیل شده است؟ هر یک را نام بگیرید. - مراحلی که یک حجرۀ مادری به دو حجرۀ دیگر تقسیم می شود، با استفاده از شکل بیان دارید. - وقتی یک حجره به دوحجرۀ دیگر تقسیم می شود، این روش را به نام چی یاد می‌کنند؟ اگر شاگردان جوابات درست ارائه کردند آنها را تشویق و ترغیب کنید در غیر آن خود شکل ورودی را طور زیر توضیح کرده و بعد سؤال ورودی را بپرسید: قسمیکه در شکل مشاهده می گردد؛ در مرحلۀ اول یک حجره(سلول) مادری از سه قسمت هسته، پوش و هستۀ کروموزوم‌ها تشکیل گردیده است که کروموزوم‌های آن به شکل پراکنده می‌باشد. در مرحلۀ دوم کروموزوم‌ها در وسط حجره شکل زنجیری را به خود گرفته، در مرحلۀ سوم حجره از وسط همین زنجیره‌های کروموزوم به طرف پایین و بالا برجسته‌گی پیدا نموده و در قسمت وسطی باریک گردیده است و بالآخره در مرحلۀ چهارم حجره به دو حجرۀ دختری تبدیل گردیده که هر کدام دارای هسته، پوش هسته و کروموزوم‌های جداگانه می‌باشند.

فعالیت جریان درس (28)دقیقه

شاگردان را به گروه ها تقسیم کرده و به آنها وظیفه دهید تا فعالیت صفحهٔ(165) کتاب درسی را در گروه‌های مربوطه خود انجام دهند.

در جریان فعالیت از کار گروه ها نظارت به عمل آرید تا همهٔ اعضای گروه در انجام کار گروهی سهیم باشند. در اخیر فعالیت از نمایندهٔ تمام گروه ها بخواهید تا در صورت موجودیت وقت کار انجام شدهٔ گروه شان را به دیگران واضح نمایند.

در ختم فعالیت نتیجه که از انجام آن به دست می آید آنرا واضح ساخته، بعد فارمول انتیگرال معین و غیر معین قسمی را به روی تخته نوشته و توضیح نمایید.

برای اجرای کار انفرادی از یک شاگرد بخواهید تا مثال(2) صفحهٔ(166) کتاب درسی را به روی تخته حل نماید.

همزمان از سایر شاگردان بخواهید تا هر کدام به طور جداگانه آنرا در کتابچه های شان حل نمایند. اگر در حل روی تخته مشکلی وجود داشت از یک شاگرد داوطلب بخواهید تا آنرا اصلاح نماید؛ سپس به شاگردان دیگر بگویید تا سؤال حل شدهٔ کتابچه‌های شان را با سؤال حل شدهٔ روی تخته مقایسه کنند، این کار به شاگردانی که دچار اشتباه شدند کمک می کند تا به غلطی خود پی برده و آنرا تصحیح نمایند.

تحکیم درس (7) دقیقه

برای اینکه شاگردان موضوع درس جدید را خوبتر فرا گیرند، مثال(2) صفحهٔ(166) کتاب درسی را به روی تخته بنویسید، بعد به حل آن اقدام نمایید طوریکه شاگردان در حل مثال فعالانه سهم بگیرند.

ارزیابی ختم درس (5) دقیقه

به منظور اینکه اطمینان حاصل نمایید آیا شاگردان درس ارائه شده را خوب فرا گرفته اند یاخیر؟ درس را ارزیابی کنید؛ طوریکه چند سؤال در مورد درس جدید طرح و از شاگردان جواب به دست آرید؛ طور مثال:

- کلمهٔ قسمی یعنی چی؟
- فارمول انتیگرال معین و غیر معین قسمی را به روی تخته بنویسید.
- قیمت $\int e^x\,dx$ مساوی به چیست؟به زبان بیان دارید.

معلومات اضافی

سؤال: قیمت $\int \ln x\,dx$ را حساب کنید.

حل: نخست تابع داده شده را تعویض، بعد با استفاده از فارمول انتیگرال غیر معین قسمی داریم که:

$$u=\ln x \quad , \quad du=\frac{1}{x}dx \qquad\qquad dv=dx \quad , \quad v=x$$

$$\int v'\cdot u\,dx = u\cdot v-\int u'\cdot v\,dx$$

$$\int \ln x\,dx=\ln x\cdot x-\int\frac{1}{x}\cdot x\,dx$$

$$\int \ln x\,dx = x\ln x-\int dx$$

$$\int \ln x\,dx = x\ln x - x + C$$

جواب به سؤال های تمرین

انتیگرال های زیر را حساب کنید:

حل جزa)

$$\int \theta \cos\theta \, d\theta = ?$$

$$u = \theta \quad , \quad du = d\theta$$

$$dv = \cos\theta \, d\theta \quad , \quad v = \sin\theta$$

$$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v du$$

$$\int \theta \cos\theta \, d\theta = \theta \cdot \sin\theta - \int \sin\theta \, d\theta = \theta \sin\theta - (-\cos\theta) + C = \theta \sin\theta + \cos\theta + C$$

حل جزb):

یادداشت:

$$\int \sin 2x dx = -\frac{1}{2}\cos 2x$$

$$\int \cos 2x dx = \frac{1}{2}\sin 2x$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos 2x dx = ?$$

$$u = x \quad , \quad du = dx$$

$$dv = \cos 2x dx \quad , \quad v = \frac{1}{2}\sin 2x$$

$$\int_a^b u dv = u \cdot v \,|_a^b - \int_a^b v du$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos 2x dx = [x \cdot \frac{1}{2}\sin 2x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\sin 2x \cdot dx = [\frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2}\sin 2(\frac{\pi}{2}) - 0] - \frac{1}{2}[-\frac{1}{2}\cos 2x]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{\pi}{4}\sin\pi + \frac{1}{4}[\cos 2x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4} \cdot \sin 180^\circ + \frac{1}{4}[\cos 2(\frac{\pi}{2}) - \cos 2 \cdot 0]$$

$$= \frac{\pi}{4} \cdot 0 + \frac{1}{4}[\cos\pi - \cos 0] = 0 + \frac{1}{4}[\cos 180^\circ - 1] = \frac{1}{4}[-1-1] = \frac{1}{4}(-2) = -\frac{1}{2}$$

حل جزc):

$$\int x^5 \cos x^3 dx = ?$$

$$\int x^5 \cos x^3 dx = \int x^3 \cos x^3 \cdot x^2 dx \ldots I$$

حال از طریقهٔ تعویض استفاده می کنیم:

$$x^3 = u \quad \Rightarrow \quad 3x^2 dx = du \quad \Rightarrow \quad x^2 dx = \frac{1}{3}du$$

قیمت تعویض شده را در رابطه (I) وضع می نماییم:

$$\int x^5 \cos x^3 dx = \int x^3 \cos x^3 \cdot x^2 dx = \int u \cos u \cdot \frac{1}{3}du = \frac{1}{3}\int u \cos u du$$

اکنون با استفاده از انتیگرال های قسمی داریم که:

$$x = u \quad , \quad dx = du$$

$$dv = \cos u \, du \quad , \quad v = \sin u$$

$$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$$

$$\frac{1}{3}\int u \cos u du = \frac{1}{3}[u \cdot \sin u - \int \sin u \, du]$$

$$= \frac{1}{3}[u \cdot \sin u + \cos u] + C$$

حال قیمت u را نظر به بالا به x^3 تعویض می کنیم:

$$\frac{1}{3}\int u \cos u du = \frac{1}{3}[x^3 \cdot \sin x^3 + \cos x^3] + C$$

$$\Rightarrow \int x^5 \cos x^3 dx = \frac{1}{3}[x^3 \cdot \sin x^3 + \cos x^3] + C$$

حل جز d):

$$\int_0^1 xe^x dx = ?$$

$$u = x \quad , \quad du = dx$$

$$dv = e^x dx \quad , \quad v = e^x$$

$$\int_a^b udv = v \cdot u \,|_a^b - \int_a^b vdu$$

$$\int_0^1 xe^x dx = \left[x \cdot e^x\right]_0^1 - \int_0^1 e^x dx = \left[1 \cdot e^1 - 0 \cdot e^0\right] - \left[e^x\right]_0^1 = e^1 - \left[e^1 - e^0\right] = e^1 - e^1 + e^0 = 1$$

فصل چهارم

عنوان: نکات مهم فصل

صفحهٔ کتاب:(167- 170)

وقت تدریس: یک ساعت درسی

اهداف آموزشی **- دانشی** **- مهارتی** **- ذهنیتی**	- شاگردان مفاهیم نکات مهم فصل چهارم را بدانند. - شاگردان مفاهیم نکات مهم فصل چهارم را تحلیل و تجزیه کرده بتوانند. - شاگردان از حل سؤال تمرینات عمومی فصل چهارم احساس خوشی نموده و آنرا در زنده گی روز مرهٔ خویش به کار ببرند.
روش های تدریس	سؤال و جواب ، کار انفرادی
مواد ممد درسی	چارت تمام عناوین نکات مهم فصل چهارم
توضیح ورودی **(5) دقیقه**	کار های مقدماتی که بعد از داخل شدن به صنف برای هر معلم ضروری است ابتدا آنرا انجام دهید؛ سپس درس روز گذشته را مختصراً ارزیابی نمایید. بعد چارتی را که از قبل آماده نموده اید آنرا پیش روی صنف آویزان کنید؛ سپس توجه شاگردان را به نکات مهم این فصل جلب نموده و اهمیت این نکات را به آنها بیان دارید تا آنها به اهمیت آن پی برده و علاقه به یاد گیری بهتر آن از خود نشان دهند و نکات مهم را خوب یاد گیرند.

فعالیت جریان درس (28)دقیقه

از شاگردان به نوبت بخواهید تا هر کدام پیش‌روی تخته آمده و یک عنوان را از روی چارت بخواند. بعد به شاگردان دیگر در مورد، توضیحات لازم بدهد و در اخیر رابطهٔ آنرا به روی تخته بنویسد. این کار انفرادی را تا وقتی ادامه دهید تا تمام نکات مهم فصل توسط شاگردان توضیح گردد. احیاناً اگر در جریان توضیحات شاگردان کدام اشتباهی وجود داشت آنرا به روی تخته یادداشت کرده تا بعداً به اصلاح آن بپردازید.

تحکیم درس (7) دقیقه

برای اینکه شاگردان به اهمیت نکات مهم فصل بهتر پی ببرند، هر یک از نکات مهم را که در جریان توضیح آن شاگردان مشکل داشتند شما خود آنرا طوری واضح سازید که تمام مشکلات آنها حل گردیده و در آینده کدام سؤالی نداشته باشند.

ختم درس (5) دقیقه

به منظور اینکه مطمئن شوید آیا شاگردان به اهمیت نکات مهم فصل پی برده اند یا خیر ؟ در مورد بعضی از این نکات مهم از شاگردان سؤال کنید؛ طور مثال:

- طول و عرض مستطیل ها چطور به دست می‌آیند؟

- انتیگرال به چند نوع است؟ هر کدام آن را تعریف کنید.
- انتیگرال معین و غیر معین دارای چند خواص اند؟
- رابطهٔ قضیهٔ اول و دوم اساسی مشتق و انتیگرال را بیان دارید.
- یک انتیگرال چطور مشخص می گردد که تعویضی است؟
- فارمول های انتیگرال معین و غیر معین قسمی را به روی تخته بنویسید.

حل تمرینات فصل چهارم

1- قیمت انتیگرال های معین زیر را به دست آرید:

$$a)\ \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+x^2}\,dx = ?$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \left[Arc\tan x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = Arc\tan\frac{\pi}{4} - Arc\tan 0 = Arc\tan\frac{3.14}{4} - 0 = Arc\tan 0.7$$

$$b)\ \int_{-4}^{4}\left[2x^2 - \frac{1}{8}x^4\right]dx = \int_{-4}^{4} 2x^2dx - \int_{-4}^{4}\frac{1}{8}x^4dx = \left[\frac{2x^3}{3}\right]_{-4}^{4} - \frac{1}{8}\left[\frac{x^5}{5}\right]_{-4}^{4}$$

$$= \frac{2}{3}\left[(4)^3 - (-4)^3\right] - \frac{1}{40}\left[4^5 - (-4)^5\right] = \frac{2}{3}\left[64 - (-64)\right] - \frac{1}{40}\left[1024 - (-1024)\right]$$

$$= \frac{2}{3}\left[64 + 64\right] - \frac{1}{40}\left[1024 + 1024\right] = \frac{2}{3}\cdot 128 - \frac{1}{40}\cdot 2048 = \frac{256}{3} - \frac{2048}{40}$$

$$= \frac{10240 - 6144}{120} = \frac{4096}{120} = 34.1\overline{3}$$

$$c)\ \int_2^4 \frac{1}{x^2}\,dx = \int_2^4 x^{-2}dx = \left[\frac{x^{-2+1}}{-2+1}\right]_2^4 = \left[\frac{x^{-1}}{-1}\right]_2^4 = \left[-\frac{1}{x}\right]_2^4 = [-\frac{1}{4} - (-\frac{1}{2})] = [-\frac{1}{4} + \frac{1}{2}] = \left[\frac{-1+2}{4}\right] = \frac{1}{4}$$

$$d)\ \int_0^3 4dx = \left[4x\right]_0^3 = \left[4\cdot 3 - 4\cdot 0\right] = 12$$

$$e)\ \int_1^3 \sqrt{x}dx = \int_1^3 x^{\frac{1}{2}}dx = \left[\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right]_1^3 = \left[\frac{x^{\frac{1+2}{2}}}{\frac{1+2}{2}}\right]_1^3 = \left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_1^3 = \frac{2}{3}\left[\sqrt{x^3}\right]_1^3 = \frac{2}{3}\left[\sqrt{3^3} - \sqrt{1^3}\right]$$

$$= \frac{2}{3}\left[\sqrt{3^3} - 1\right] = \frac{2}{3}\left[\sqrt{27} - 1\right] = \frac{2}{3}\left[5.19 - 1\right] = \frac{2}{3}\left[4.19\right] = \frac{8.38}{3} = 2.79$$

$$f)\ \int_1^2 (x^2 - x^5)\,dx = \int_1^2 x^2 dx - \int_1^2 x^5 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 - \left[\frac{x^6}{6}\right]_1^2 = \left[\frac{2^3}{3} - \frac{1}{3}\right] - \left[\frac{2^6}{6} - \frac{1}{6}\right] = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} - \frac{64}{6} + \frac{1}{6}$$

$$= \frac{8-1}{3} - \frac{64+1}{6} = \frac{7}{3} - \frac{63}{6} = \frac{14-63}{6} = -\frac{49}{6} = -8.1\overline{6}$$

$$g)\ \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \int \sec^2 x\,dx = \tan x \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} = \tan\frac{\pi}{6} - \tan\frac{\pi}{6} = 0$$

$$h)\ \int_{-2}^{0} \left[\frac{x^3}{4} + \frac{x^2}{3}\right] dx = ?$$

$$\int_{-2}^{0} \left[\frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{3}x^2\right] dx = \frac{1}{4}\int_{-2}^{0} x^3 dx + \frac{1}{3}\int_{-2}^{0} x^2 dx = \frac{1}{4}\left[\frac{x^4}{4}\right]_{-2}^{0} + \frac{1}{3}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{0}$$

$$= \frac{1}{16}[0-(-2)^4] + \frac{1}{9}\left[0^3 - (-2)^3\right] = \frac{1}{16}[-16] + \frac{1}{9}[-(-8)]$$

$$= \frac{-16}{16} + \frac{8}{9} = -1 + \frac{8}{9} = \frac{-9+8}{9} = \frac{-1}{9}$$

$$i)\ \int_2^3 (x^3 + x^2)\,dx = \int_2^3 x^3 dx + \int_2^3 x^2 dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_2^3 + \left[\frac{x^3}{3}\right]_2^3 = \frac{3^4}{4} - \frac{2^4}{4} + \frac{3^3}{3} - \frac{2^3}{3}$$

$$= \frac{81}{4} - \frac{16}{4} + \frac{27}{3} - \frac{8}{3} = \frac{81-16}{4} + \frac{27-8}{3} = \frac{65}{4} + \frac{19}{3} = \frac{195+76}{12} = \frac{271}{12} = 22.5$$

$$j)\ \int_{-2}^{2} \left[x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 3x - 4\right] dx = ?$$

$$\int_{-2}^{2} x^3 dx - \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} x^2 dx + 3\int_{-2}^{2} x dx - 4\int_{-2}^{2} dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_{-2}^{2} - \frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{2} + 3\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-2}^{2} - 4[x]_{-2}^{2}$$

$$= \frac{2^4}{4} - \frac{(-2)^4}{4} - \frac{1}{2}\left[\frac{2^3}{3} - \frac{(-2)^3}{3}\right] + 3\left[\frac{2^2}{2} - \frac{(-2)^2}{2}\right] - 4[2+2]$$

$$= \frac{16}{4} - \frac{16}{4} - \frac{1}{2}\left[\frac{8}{3} + \frac{8}{3}\right] + 3\left[\frac{4}{2} - \frac{4}{2}\right] - 4[4]$$

$$= -\frac{8}{6} - \frac{8}{6} + 6 - 6 - 16 = \frac{-8-8}{6} - 16 = \frac{-16}{6} - 16$$

$$= \frac{-16-96}{6} = \frac{-112}{6} = -18.\overline{6}$$

$$k)\ \int_0^{\pi} \sin x dx = [-\cos x]_0^{\pi} = [-\cos\pi - (-\cos 0)] = -\cos 180^\circ + \cos 0 = -(-1) + 1 = 1 + 1 = 2$$

$$l)\ \int_1^2 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 = \frac{1}{3}\left[x^3\right]_1^2 = \frac{1}{3}\left[2^3 - 1^3\right] = \frac{1}{3}[8-1] = \frac{1}{3}[7] = \frac{7}{3}$$

2- قیمت انتیگرال های غیر معین زیر را محاسبه کنید:

حل:

$$a)\ \int[\sin x+8x^3]dx=\int\sin xdx+\int 8x^3dx=-\cos x+8\cdot\frac{x^4}{4}+C=-\cos x+2x^4+C$$

$$b)\ \int\left[x^5+\frac{4}{x^4}+x^3+\frac{2}{x^2}+x\right]dx=\int x^5dx+\int\frac{4}{x^4}dx+\int x^3dx+\int\frac{2}{x^2}dx+\int xdx$$

$$=\int x^5dx+4\int x^{-4}dx+\int x^3dx+2\int x^{-2}dx+\int xdx$$

$$=\frac{x^6}{6}+4\left(\frac{x^{-4+1}}{-4+1}\right)+\frac{x^{3+1}}{3+1}+2\left(\frac{x^{-2+1}}{-2+1}\right)+\frac{x^2}{2}+C$$

$$=\frac{1}{6}x^6+4\left(\frac{x^{-3}}{-3}\right)+\frac{x^4}{4}+2\left(\frac{x^{-1}}{-1}\right)+\frac{1}{2}x^2+C$$

$$=\frac{1}{6}x^6+\frac{4}{3}x^{-3}+\frac{1}{4}x^4-2x^{-1}+\frac{1}{2}x^2+C$$

$$=\frac{1}{6}x^6-\frac{4}{3x^3}+\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{x}+\frac{1}{2}x^2+C$$

$$c)\ \int x(1-2x^2)dx=\int(x-2x^3)\,dx=\int xdx-\int 2x^3dx=\frac{x^2}{2}-2\frac{x^4}{4}+C=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x^4+C$$

$$=\frac{1}{2}(x^2-x^4)+C$$

$$d)\ \int\sin xdx=-\cos x+C$$

$$g)\ \int\sqrt[5]{x^3}dx=\int x^{\frac{3}{5}}dx=\frac{x^{\frac{3}{5}+1}}{\frac{3}{5}+1}+C=\frac{x^{\frac{8}{5}}}{\frac{8}{5}}+C=\frac{5}{8}x^{\frac{8}{5}}+C$$

$$h)\ \int\frac{3x^2+8x}{x}dx=\int\frac{x(3x+8)}{x}dx=\int(3x+8)dx=\int 3xdx+\int 8dx=3\frac{x^2}{2}+8x+C=\frac{3}{2}x^2+8x+C$$

$$e)\ \int\frac{\sin 2x}{2\sin x}dx=\int\frac{2\sin x\cdot\cos x}{2\sin x}dx=\int\cos xdx=\sin x+C$$

$$f)\ \int\frac{(1-x)^2}{1-x}dx=\int\frac{(1-x)(1-x)}{(1-x)}dx=\int(1-x)dx=\int dx-\int xdx=x-\frac{x^2}{2}+C$$

$$i)\ \int(2x^2+3)dx=\int 2x^2dx+3\int dx=2\frac{x^3}{3}+3x+C=\frac{2}{3}x^3+3x+C$$

$$j)\ \int\frac{x^2}{\sqrt{x^3+2}}dx=\int\frac{1}{\sqrt{u}}\cdot\frac{du}{3}\qquad\left\{x^3+2=u\ \Rightarrow\ 3x^2dx=du\ \Rightarrow\ x^2dx=\frac{du}{3}\right.$$

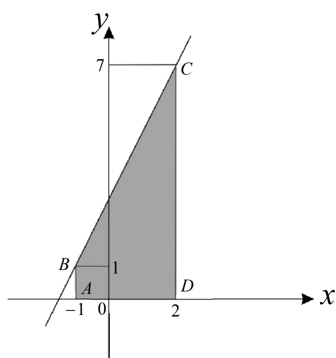
$$=\frac{1}{3}\int u^{-\frac{1}{2}}du+C=\frac{1}{3}\frac{u^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}+C=\frac{2}{3}\sqrt{u}+C=\frac{2}{3}\sqrt{(x^3+2)}+C$$

نوت: صورت کسر x^2 است نه(1)، اما در کتاب درسی سهواً(1) چاپ گردیده، لطفاً سؤال را مطابق رهنما به شاگردان حل نمایید.

3– مساحت محصور شدهٔ انتیگرال زیر را با استفاده از شکل حساب کنید:

حل:

$$\int_{-1}^{2}(2x+3)\,dx$$



$$A=\frac{1}{2}(a+b)\cdot h$$

$$A=\frac{1}{2}(AB+DC)\cdot AD$$

$$A=\frac{1}{2}(1+7)\cdot 3=\frac{1}{2}(8)\cdot 3=\frac{1}{2}\cdot 24 \Rightarrow \quad A=12$$

$$\int_{-1}^{2}(2x+3)\,dx=\int_{-1}^{2}2xdx+\int_{-1}^{2}3dx=3\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{2}+3[x]_{-1}^{2}=\frac{2}{2}\left[x^2\right]_{-1}^{2}+3[x]_{-1}^{2}=\left[2^2-(-1)^2\right]+3[2-(-1)]$$

$$=[4-1]+3[2+1]=3+6+3=12$$

4– انتیگرال های زیر را با استفاده از روش تعویضی دریابید:

حل:

$$a)\ \int 3\cos(2x+1)dx=?$$

$$u=2x+1 \quad , \quad du=2dx \Rightarrow \quad dx=\frac{1}{2}du$$

$$\int 3\cos(2x+1)dx=\int 3\cos u\cdot\frac{1}{2}du=\frac{3}{2}\int\cos u\cdot du=\frac{3}{2}[\sin u]+C=\frac{3}{2}\sin(2x+1)+C$$

$$b)\ \int x^3\sqrt{x^4+2}\,dx=?$$

$$u=x^4+2 \quad , \quad du=4x^3dx \Rightarrow \quad x^3dx=\frac{1}{4}du$$

$$\int\sqrt{u}\cdot\frac{1}{4}du=\frac{1}{4}\int u^{\frac{1}{2}}\cdot du=\frac{1}{4}\left[\frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right]+C=\frac{1}{4}\left[\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]+C=\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}\left[u^{\frac{3}{2}}\right]+C=\frac{2}{12}\left[\sqrt{u^3}\right]+C$$

$$=\frac{1}{6}\sqrt{(x^4+2)^3}+C$$

$f)\ \int (x^3+2)^2 \cdot 3x^2 dx = ?$

$u = x^3 + 2 \quad , \qquad du = 3x^2 dx$

$$\int (x^3+2)^2 \cdot 3x^2 dx = \int u^2 \cdot du = \frac{u^3}{3} + C = \frac{1}{3}u^3 + C = \frac{1}{3}(x^3+2)^3 + C$$

$g)\ \int_0^2 \frac{dt}{(3-2t)^2} = ?$

$u = 3 - 2t \quad , \qquad du = -2dt \Rightarrow \quad dt = -\frac{1}{2}du$

$$\begin{cases} t = 0 \\ u = 3 - 2t = 3 - 2 \cdot 0 = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t = 2 \\ u = 3 - 2t = 3 - 2 \cdot 2 = 3 - 4 = -1 \end{cases}$$

$$\int_0^2 \frac{dt}{(3-2t)^2} = \int_3^{-1} \frac{-\frac{1}{2}du}{u^2} = -\frac{1}{2}\int_3^{-1}\frac{du}{u^2} = -\frac{1}{2}\int_3^{-1} u^{-2}du = -\frac{1}{2}\left[\frac{u^{-2+1}}{-2+1}\right]_3^{-1} = -\frac{1}{2}\left[\frac{u^{-1}}{-1}\right]_3^{-1}$$

$$= -\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{u}\right]_3^{-1} = -\frac{1}{2}[-\frac{1}{-1} - (-\frac{1}{3})] = -\frac{1}{2}[1 + \frac{1}{3}] = -\frac{1}{2}[\frac{4}{3}] = -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3}$$

$h)\ \int_0^2 x^2\sqrt{9-x^3}dx = ?$

$u = 9 - x^3 \quad , \qquad du = -3x^2 dx \Rightarrow \quad x^2 dx = -\frac{1}{3}du$

$$\begin{cases} x = 0 \\ u = 9 - x^3 = 9 - 0^3 = 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ u = 9 - x^3 = 9 - 2^3 = 9 - 8 = 1 \end{cases}$$

$$\int_0^2 x^2\sqrt{9-x^3}dx = \int_9^1 \sqrt{u}(-\frac{1}{3})du = -\frac{1}{3}\int_9^1 u^{\frac{1}{2}}du = -\frac{1}{3}\left[\frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right]_9^1 = -\frac{1}{3}\left[\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_9^1$$

$$= -\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\left[u^{\frac{3}{2}}\right]_9^1 = -\frac{2}{9}\left[\sqrt{u^3}\right]_9^1 = -\frac{2}{9}[\sqrt{1^3} - \sqrt{9^3}] = -\frac{2}{9}[1 - \sqrt{729}]$$

$$= -\frac{2}{9}[1-27] = -\frac{2}{9}[-26] = \frac{52}{9} = 5.\overline{7}$$

$$i)\ \int \frac{1}{(x-10)^7}dx = ?$$

$$u = x-10 \quad , \qquad du = dx$$

$$\int \frac{1}{(x-10)^7}dx = \int \frac{1}{u^7}du = \int u^{-7}du = \frac{u^{-7+1}}{-7+1} + C = \frac{u^{-6}}{-6} + C = -\frac{1}{6}\cdot u^{-6} + C$$

$$= -\frac{1}{6}(x-10)^{-6} + C = -\frac{1}{6(x-10)^6} + C$$

$$j)\ \int_0^1 (1-x^2)^3 \cdot x dx = ?$$

$$u = 1-x^2 \quad , \qquad du = -2xdx \ \Rightarrow \ dx\cdot x = -\frac{1}{2}du$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ u = 1-x^2 = 1-0^2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ u = 1-x^2 = 1-1^2 = 0 \end{cases}$$

$$\int_0^1 (1-x^2)^3 x\cdot dx = \int_1^0 u^3(-\frac{1}{2})du = -\frac{1}{2}\int_1^0 u^3 du = -\frac{1}{2}\left[\frac{u^4}{4}\right]_1^0 = -\frac{1}{8}\left[u^4\right]_1^0$$

$$= -\frac{1}{8}\left[0^4 - 1^4\right] = -\frac{1}{8}[-1^4] = -\frac{1}{8}[-1] = \frac{1}{8}$$

$$k)\ \int (4-3x)^7 dx = ?$$

$$u = 4-3x \quad , \qquad du = -3dx \ \Rightarrow \qquad dx = -\frac{1}{3}du$$

$$\int (4-3x)^7 dx = \int u^7(-\frac{1}{3})du = -\frac{1}{3}\int u^7 du = -\frac{1}{3}\left[\frac{u^8}{8}\right] + C = -\frac{1}{24}\left[u^8\right] + C = -\frac{1}{24}(4-3x)^8 + C$$

$$l)\ \int \frac{x^2 dx}{\sqrt[4]{x^3+2}} = ?$$

$$u = x^3+2 \quad , \qquad du = 3x^2 dx \ \Rightarrow \ x^2 dx = \frac{1}{3}du$$

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt[4]{x^3+2}} = \int \frac{\frac{1}{3}du}{\sqrt[4]{u}} = \frac{1}{3}\int \frac{du}{u^{\frac{1}{4}}} = \frac{1}{3}\int u^{-\frac{1}{4}}du = \frac{1}{3}\left[\frac{u^{-\frac{1}{4}+1}}{-\frac{1}{4}+1}\right] + C = \frac{1}{3}\left[\frac{u^{\frac{3}{4}}}{\frac{3}{4}}\right] + C$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{4}{3}\left[u^{\frac{3}{4}}\right] + C = \frac{4}{9}\left[\sqrt[4]{u^3}\right] + C = \frac{4}{9}\sqrt[4]{(x^3+2)^3} + C$$

5- انتیگرال های زیر را با استفاده از روش قسمی حل کنید:

$a)\ \int x\cos xdx = ?$

$u = x \quad , \qquad du = dx$

$dv = \cos xdx \quad , \quad v = \sin x$

$\int udv = u\cdot v - \int vdu$

$\int x\cos xdx = x\cdot\sin x - \int \sin xdx = x\sin x - (-\cos x) + C = x\sin x + \cos x + C$

$b)\ \int_0^{\pi} \sin x\cos xdx = ?$

$u = \sin x \quad , \qquad du = \cos xdx$

$dv = \cos xdx \quad , \quad v = \sin x$

$\int_0^{\pi} \sin x\cos xdx = [\sin x\cdot\sin x]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\sin x\cdot\cos xdx$

$\int_0^{\pi} \sin x\cdot\cos xdx + \int_0^{\pi}\sin x\cdot\cos xdx = [\sin^2 x]_0^{\pi}$

$2\int_0^{\pi} \sin x\cdot\cos xdx = [\sin^2\pi - \sin^2 0]$

$\int_0^{\pi} \sin x\cdot\cos xdx = \left[\frac{\sin^2(180^\circ) - 0}{2}\right]$ $\qquad$ $\boxed{\sin\pi = \sin(180)^\circ = 0}$

$\Rightarrow \int_0^{\pi} \sin x\cdot\cos xdx = 0$

$c)\ \int e^x\cdot\cos xdx = ?$

$u = \cos x \quad , \qquad du = -\sin xdx$

$dv = e^x dx \quad , \quad v = e^x$

$\int udv = u\cdot v - \int vdu$

$\int e^x\cos x\,dx = \cos x\cdot e^x - \int e^x(-\sin x)dx = e^x\cos x + \int e^x\sin xdx \ \ldots\ \text{I}$

اکنون در رابطهٔ بالا $\int e^x\sin xdx$ یک انتیگرال قسمی است؛ پس آنرا دوباره انتیگرال می گیریم:

$\int e^x\sin xdx = ?$

$u = \sin x \quad , \quad du = \cos xdx$

$dv = e^x dx \quad , \quad v = e^x$

$\int udv = u\cdot v - \int vdu$

$\int e^x\sin x\,dx = \sin x\cdot e^x - \int e^x\cdot\cos xdx$

حال قیمت را در رابطهٔ I وضع می کنیم:

$$\int e^x \cos x dx = e^x \cos x + \int e^x \sin x dx$$

$$\int e^x \cos x\, dx = e^x \cos x + \sin x \cdot e^x - \int e^x \cos x dx$$

$$\int e^x \cos x dx + \int e^x \cos x dx = e^x \cos x + e^x \sin x$$

$$2\int e^x \cos x dx = e^x \cos x + e^x \sin x$$

$$2\int e^x \cos x dx = e^x (\cos x + \sin x)$$

$$\int e^x \cos x dx = \frac{1}{2} e^x (\cos x + \sin x)$$

$d)\ \int_0^{2\pi} x \cos 3x dx = ?$

$u = x \quad , \qquad du = dx$

$dv = \cos 3x dx \quad , \qquad v = \frac{1}{3}\sin 3x$

$$\int_0^{2\pi} x \cos 3x dx = \left[x \cdot \frac{1}{3}\sin 3x\right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \frac{1}{3}\sin 3x dx$$

$$\int_0^{2\pi} x \cos 3x dx = \left[\frac{1}{3} x \sin 3x\right]_0^{2\pi} - \frac{1}{3}\int_0^{2\pi} \sin 3x dx$$

$$\int_0^{2\pi} x \cos 3x dx = \left[\frac{1}{3} \cdot 2\pi \cdot \sin 6\pi - 0\right] - \frac{1}{3}\left[-\frac{1}{3}\cos 3x\right]_0^{2\pi}$$

$$\int_0^{2\pi} x \cos 3x dx = \left[\frac{2\pi}{3}\sin 6\pi\right] + \frac{1}{9}\left[\cos 6\pi - \cos 0\right] \Rightarrow \int_0^{2\pi} x \cos 3x dx = 0 + \frac{1}{9}(1-1) = 0 + 0 = 0$$

$e)\ \int x e^{-x} dx = ?$

$u = x \quad , \qquad du = dx$

$dv = e^{-x} dx \quad , \qquad v = -e^{-x}$

$$\int x e^{-x} dx = -x e^{-x} - \int -e^{-x} dx = -x e^{-x} + (-e^{-x}) + C = -x e^{-x} - e^{-x} + C$$

$f)\ \int x\sqrt{1+x}\, dx = ?$

$u = x \quad , \qquad du = dx$

$dv = \sqrt{1+x} \quad , \qquad dv = (1+x)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \quad v = \frac{(1+x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}$

$$\int x\sqrt{1+x} dx = x \cdot \frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}\int (1+x)^{\frac{3}{2}} \cdot dx = \frac{2}{3}x(1+x)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{5}(1+x)^{\frac{5}{2}} + C$$

$$= \frac{2}{3}x(1+x)^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{15}(1+x)^{\frac{5}{2}} + C$$

یادداشت:
$$\int e^{2x}dx = \frac{1}{2}e^{2x} + C$$

$g)\ \int x^2 \cdot e^{2x}dx = ?$

$u = x^2 \quad , \qquad du = 2xdx$

$dv = e^{2x}dx \quad , \quad v = \frac{1}{2}e^{2x}$

$$\int x^2 e^{2x}dx = x^2 \cdot \frac{1}{2}e^{2x} - \int \frac{1}{2}e^{2x} \cdot 2xdx = \frac{1}{2}x^2 \cdot e^{2x} - \int xe^{2x}dx .....I$$

در رابطهٔ فوق $\int xe^{2x}dx$ باز هم انتیگرال قسمی است پس داریم:

$\int xe^{2x}dx = ?$

$u = x \quad , \quad du = dx$

$dv = e^{2x}dx \quad , \quad v = \frac{1}{2}e^{2x}$

$$\int xe^{2x}dx = x \cdot \frac{1}{2}e^{2x} - \int \frac{1}{2}e^{2x}dx = \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + C$$

قیمت را در رابطهٔ (I) وضع می کنیم:

$$\int x^2 e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}x^2 \cdot e^{2x} - (\frac{1}{2}x \cdot e^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + C) = \frac{1}{2}x^2 \cdot e^{2x} - \frac{1}{2}x \cdot e^{2x} + \frac{1}{4}e^{2x} - C$$

$$\int x^2 e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}x^2 \cdot e^{2x} - \frac{1}{2}x \cdot e^{2x} + \frac{1}{4}e^{2x} + C_1 \qquad \boxed{-C = C_1}$$

$h)\ \int e^{2x} \cdot \sin 3xdx = ?$

$u = \sin 3x \quad , \qquad du = 3\cos 3xdx$

$dv = e^{2x}dx \quad , \quad v = \frac{1}{2}e^{2x}$

$$\int e^{2x} \cdot \sin 3x\,dx = \sin 3x \cdot \frac{1}{2}e^{2x} - \int \frac{1}{2}e^{2x} \cdot 3\cos 3xdx$$
$$= \frac{1}{2}\sin 3x \cdot e^{2x} - \frac{1}{2}\int e^{2x} \cdot 3\cos 3xdx \qquad ...(I)$$

در رابطهٔ فوق $\int e^{2x} \cdot 3\cos 3xdx$ یک انتیگرال قسمی است پس داریم که:

$\int e^{2x} \cdot 3\cos 3xdx = ?$

$u = 3\cos 3x \quad , \qquad du = 3(-3\sin 3x)dx = -9\sin 3x\,dx$

$dv = e^{2x}dx \quad , \qquad v = \frac{1}{2}e^{2x}$

$$\int e^{2x} \cdot 3\cos 3xdx = 3\cos 3x \cdot \frac{1}{2}e^{2x} - \int \frac{1}{2}e^{2x}(-9\sin 3x)dx = \frac{1}{2}e^{2x} \cdot 3\cos 3x + \frac{9}{2}\int e^{2x}\sin 3xdx$$

در رابطهٔ I قیمت وضع می کنیم:

$$\int e^{2x}\cdot\sin 3xdx=\frac{1}{2}\sin 3x\cdot e^{2x}-\frac{1}{2}[\frac{1}{2}e^{2x}\cdot 3\cos 3x+\frac{9}{2}\int e^{2x}\sin 3xdx]$$

$$\int e^{2x}\cdot\sin 3xdx=\frac{1}{2}\sin 3x\cdot e^{2x}-\frac{1}{4}e^{2x}\cdot 3\cos 3x-\frac{9}{4}\int e^{2x}\sin 3xdx$$

$$\int e^{2x}\cdot\sin 3xdx+\frac{9}{4}\int e^{2x}\cdot\sin 3xdx=\frac{1}{2}\sin 3x\cdot e^{2x}-\frac{1}{4}e^{2x}\cdot 3\cos 3x$$

اطراف را ضرب 4 می کنیم:

$$4\int e^{2x}\sin 3xdx+9\int e^{2x}\cdot\sin 3xdx=2\sin 3x\cdot e^{2x}-e^{2x}\cdot 3\cos 3x$$

$$13\int e^{2x}\sin 3xdx=2\sin 3x\cdot e^{2x}-e^{2x}\cdot 3\cos 3x$$

$$\int e^{2x}\sin 3xdx=\frac{1}{13}e^{2x}(2\sin 3x\cdot 3\cos 3x)+C$$

$i)$ $\int x^2\cdot e^{-x}dx=?$

$$u=x^2\quad,\qquad du=2xdx$$

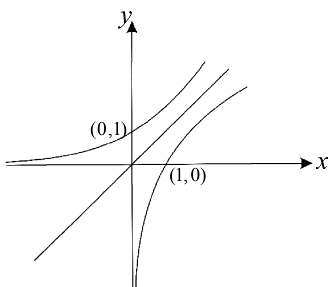
$$dv=e^{-x}dx\quad,\quad v=-e^{-x}$$

$$\int x^2\cdot e^{-x}dx=x^2(-e^{-x})-\int -e^{-x}\cdot 2xdx=-x^2e^{-x}+2\int xe^{-x}dx$$

از جزء a این سؤال می‌دانیم که $\int xe^{-x}dx=-xe^{-x}-e^{-x}+C$ بوده حال این قیمت را در رابطهٔ بالا وضع می کنیم:

$$\int x^2\cdot e^{-x}dx=-x^2e^{-x}+2(-xe^{-x}-e^{-x}+C)=-x^2e^{-x}-2xe^{-x}-2e^{-x}+2C$$

$$=-x^2e^{-x}-2xe^{-x}-2e^{-x}+C_1\qquad\boxed{2C=C_1}$$



فصل: پنجم

عنوان درس: مشتق توابع اکسپوننشیل و لوگاریتمی

صفحهٔ کتاب (176–175)

وقت تدریس(سه ساعت درسی) ساعت اول درسی

اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	• شاگردان مفهوم مشتق توابع اکسپوننشیل و لوگاریتمی را بفهمند. • شاگردان مشتق توابع اکسپوننشیل و لوگاریتمی را ثبوت کرده بتوانند. • شاگردان سؤالهای و مثال‌های مربوط به مشتق توابع اکسپوننشیل و لوگاریتمی را حل کرده بتوانند. • شاگردان به حل سؤالها و مثال‌های مربوطه به مشتق توابع اکسپوننشیل و لوگاریتمی علاقه‌مند شده و احساس خوشی نمایند.
روش های تدریس	سؤال و جواب، کارهای گروهی و انفرادی
مواد ممد درسی	چارت بخش ورودی
توضیح ورودی (5) دقیقه	بعد از داخل شدن به صنف و انجام کارهای مقدماتی که ضروری اند به ارائهٔ درس جدید بپردازید؛ طوریکه چارت شکل ورودی را در مقابل صنف آویزان نموده و سؤال مربوطه آن را از شاگردان بپرسید. شاگردان را طوری تشویق و رهنمایی نمایید تا جواب های درست را ارائه نمایند در غیرآن میتوانید تشریحات لازم را قرار زیر به آنها ارائه نمایید: این شکل سه نوع گراف را نشان می‌دهد؛ طوریکه گراف اولی عبارت از تابع نمائی $y_1 = a^x$ است، گراف دومی تابع خطی $y_2 = x$ و تابع سومی عبارت از تابع معکوس تابع نمائی، یعنی تابع لوگاریتمی $y_3 = \log_a^x$ است طوریکه تابع نمائی و تابع لوگاریتمی نظر به تابع خطی $y_2 = x$ متناظر اند.

فعالیت جریان درس: (28) دقیقه

شاگردان را به گروه‌های مناسب تقسیم نموده و به آنها وظیفه دهید تا فعالیت صفحهٔ(175) کتاب درسی رادر گروه های شان به مشوره هم انجام دهند .در جریان فعالیت از گروه ها نظارت به عمل آرید و همهٔ آنها را تشویق نمایید که درکارگروهی خویش سهم فعال داشته باشند. درختم کارگروهی از نمایندهٔ یک گروه بخواهید تا کارگروهی خویش را روی تخته توضیح نماید، اگر توضیحات روی تخته درست بود از گروه های متباقی بخواهید تا کار های گروهی خویش را با آن مقایسه نمایند تا اگر اشتباهات در کارشان موجود باشد به اصلاح آن بپردازند.

حال بخش اول نتیجهٔ فعالیت صفحهٔ(175)کتاب درسی را با سهم فعال شاگردان روی تخته ثبوت و توضیح نمایید.

تحکیم درس: (7) دقیقه

برای تحکیم درس بخش دوم نتیجهٔ فعالیت صفحهٔ(175) کتاب درسی را به شاگردان وظیفه دهید تا به شکل انفرادی

در کتابچه های خویش ثبوت نمایند و همزمان به آن از یک شاگرد داوطلب بخواهید تا با رهنمایی شما بخش متذکره را روی تخته ثبوت نماید. در ختم کار انفرادی اگر ثبوت درست بود از همهٔ شاگردان بخواهید تاکار انفرادی خویش را با کار تخته مقایسه نمایند تا اگر مشکل یا اشتباهی در کارشان موجود باشد به اصلاح آن بپردازند.
(متوجه باشید که شاگردان در جریان کار انفرادی از ثبوت کتاب درسی استفاده ننمایند)

ارزیابی ختم درس: (5) دقیقه

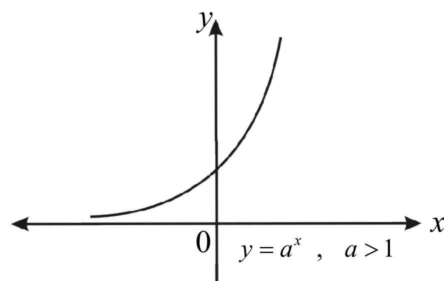
برای اینکه مطمئن شوید آیا شاگردان این درس را خوب فرا گرفته اند یاخیر؟ شما میتوانید چند سؤال را قرار ذیل از آنها بپرسید و جواب های قناعت بخش حاصل نمایید:

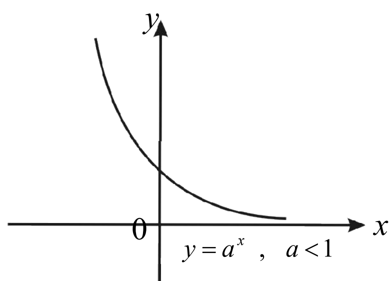
- چی رابطه بین توابع نمایی و لوگاریتمی موجود است؟
- مشتق تابع نمایی $y = a^x$ عبارت از چیست؟
- مشتق تابع لوگاریتم طبیعی عبارت از چیست؟

معلومات اضافی

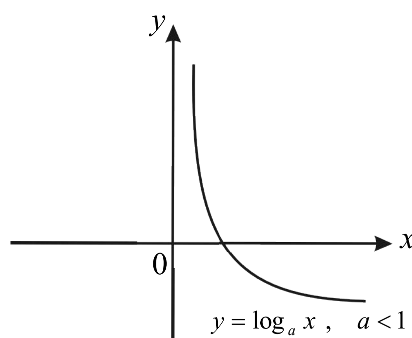
تعریف تابع نمایی: هرگاه $a > 0$ و $a \neq 1$ باشد؛ تابع $y = f(x) = a^x$ تابع یک به یک با ناحیهٔ تعریف IR و ناحیهٔ قیمت‌های $\{y / y \in IR \;,\; y > 0\}$ عبارت از تابع نمایی است طوریکه:

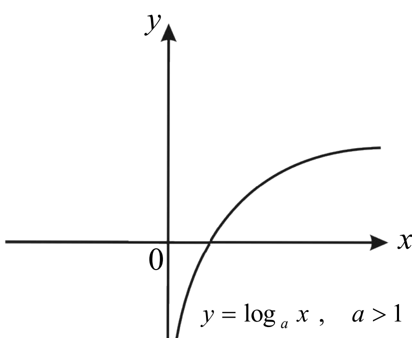
- اگر $a > 1$ باشد آنگاه تابع نمایی متزاید است.
- اگر $a < 1$ باشد آنگاه تابع نمایی متناقص است.



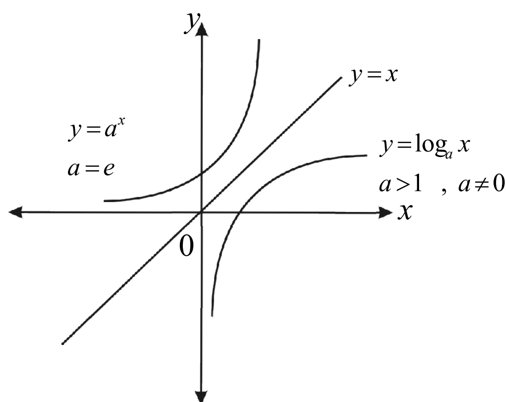


تعریف تابع لوگاریتمی: تابع معکوس تابع نمایی عبارت از تابع لوگاریتمی است؛ یعنی در صورتیکه $f(x) = a^x$ باشدتابع معکوس آن $f^{-1}(x) = \log_a^x$ طوریکه ناحیهٔ تعریف آن $\{x / x \in IR, x > 0\}$ و ناحیهٔ قیمت‌های آن IR است.





از ایـن جـا میتـوان گفـت کـه گـراف‌هـای توابـع $f(x)=a^x$ و $f^{-1}(x)=\log_a^x$ متناظر یکدیگر نظر بـه خط $y=x$ اند؛ طوریکه:



تعریف لوگاریتم: هرگاه a یک عدد مثبت و $a\neq 1$ باشـد و اگـر داشـته باشـیم کـه $N=a^x$ بنـابر تعریـف میتـوان گفت که لوگاریتم N به قاعدهٔ a مساوی به x است و می‌نویسیم که:

$$N=a^x \iff \log_a N=x$$

$$64=2^6 \iff \log_2 64=6$$

چون a عدد مثبت است و عدد مثبت به هر توان که برسـد مثبـت اسـت؛ بنـا بـر ایـن $N=a^x$ و در نتیجه N همیشه مثبت است به همین علت می گوییم که اعداد منفی و عدد صفر لوگاریتم ندارند.

رابطه بین تابع نمایی و تابع لوگاریتمی: تابع لوگاریتمی معکوس تابع نمایی است؛ یعنی:

$$f(x)=a^x \Rightarrow f^{-1}(x)=\log_a x$$

خواص لوگاریتم:

1) $1=a^0 \Rightarrow \log_a 1=0$

2) $a=a^1 \Rightarrow \log_a a=1$

هرگاه:

$$\begin{cases} M=a^x \Rightarrow \log_a M=x \\ N=a^y \Rightarrow \log_a N=y \end{cases}$$

3) $M\cdot N=a^y\cdot a^x=a^{x+y} \Rightarrow \log_a M\cdot N=x+y \Rightarrow \log_a M\cdot N=\log_a M+\log_a N$

4) $\frac{M}{N}=\frac{a^x}{a^y}=a^{x-y} \Rightarrow \log_a\frac{M}{N}=x-y \Rightarrow \log_a\frac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$

5) $\log_a\frac{1}{N}=\log_a 1 \Rightarrow \log_a\frac{1}{N}=-\log_a N$

6) $\log_a N_P^m=\frac{m}{P}\log_a N$

7) $\log_b a=x\log_a N$

8) $\log_{MN} a=\frac{1}{\log_a M+\log_a N}$

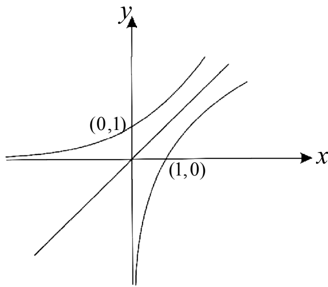
9) $\log_b a x\log_c b=\log_a c$

10) $\log_b a=\frac{\log_c a}{\log_c b}$

11) $\log_a(\log_b 1(\log_c^x))=m \Rightarrow x=c^{b^{a^m}}$

12) $\log_a N=P \Rightarrow N=a\ P \Rightarrow N=(a)^{\log_a N}$

هرگاه $\log_b x$ یک تابع متصل باشد $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$ مساوی به عدد اویلر (e) میگردد.



فصل پنجم

عنوان درس: مشتق توابع اکسپوننشیل و لوگاریتمی

صفحهٔ کتاب (178-176)

ساعت دوم درسی

اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	• شاگردان مفهوم قضیهٔ صفحهٔ (176) کتاب درسی را بفهمند. • شاگردان مشتق تابع اکسپوننشیل را بااستفاده از لوگاریتم پیدا کرده بتوانند. • شاگردان سؤالها ومثال های مربوط به مشتق تابع اکسپوننشیل را بااستفاده از لوگاریتم حل کرده بتوانند. • شاگردان به حل سؤالها ومثال های مربوطه به مشتق تابع اکسپوننشیل علاقه‌مند شوند.
روش های تدریس	سؤال و جواب، کار های گروهی وانفرادی
مواد ممد درسی	مواد مورد نیاز
توضیح ورودی (5) دقیقه	بعد از داخل شدن به صنف و انجام کارهای مقدماتی که ضروری اندبه ارائهٔ درس جدید بپردازید؛ طوریکه در این بخش اگر کدام موضوعی مربوط به این درس که باعث ایجاد انگیزه در شاگردان میشود در نظر دارید به شکل سؤال از شاگردان بپرسید در غیر آن این درس به امتداد درس قبلی است؛ بنا بر این میتوانید بخش ورودی درس قبلی را در این بخش به عین شکل مکرراً توضیح نمایید.

فعالیت جریان درس: (28) دقیقه

اولاً قضیهٔ صفحهٔ (176) کتاب درسی را با سهم گیری فعال شاگردان روی تخته ثبوت و توضیح نمایید، بعداً نتیجهٔ این قضیه را به شکل سؤال و جواب از شاگردان، روی تخته توضیح نمایید.

حال شاگردان را به گروه های مناسب تقسیم نموده و مثال اول صفحهٔ(177)کتاب درسی را به آنها وظیفه دهید تا در گروه های شان به مشورهٔ هم حل نمایند.در جریان کار گروهی از گروه ها نظارت به عمل آرید و شاگردان را تشویق نمایید که همه در کار گروهی سهم فعال داشته باشند. در ختم کار گروهی از نمایندهٔ یک گروه بخواهید تا کار گروهی خویش را روی تخته توضیح نماید از گروه‌های متباقی بخواهید تا کار های گروهی خویش را با آن مقایسه نمایند تا اگر کدام اشتباه یا مشکلی در کار شان موجود باشد به اصلاح آن بپردازند.

(متوجه باشید که شاگردان در جریان کار گروهی از سؤال حل شدهٔ کتاب درسی استفاده ننمایند)

تحکیم درس: (7) دقیقه

برای تحکیم درس به شاگردان وظیفه دهید تامثال دوم صفحهٔ(178) کتاب درسی را به شکل انفرادی در کتابچه‌های خویش حل نمایند و همزمان به آن از یک شاگرد داوطلب بخواهید تا مثال مذکور را روی تخته حل نماید. در پایان اگر حل سؤال تخته کاملاً درست بود از همهٔ شاگردان بخواهید تا حل سؤال کتابچه‌های شان را با حل سؤال روی

تخته مقایسه نمایند. اگرکدام اشتباهی در سؤال حل شدۀ شان موجود باشد به اصلاح آن بپردازند.
(متوجه باشید که شاگردان در جریان کار انفرادی از حل کتاب درسی استفاده ننمایند)

ارزیابی ختم درس: (5) دقیقه

برای اینکه مطمئن شوید شاگردان این درس را خوب فرا گرفته اند یا خیر؟ میتوانیداز آنها قرار زیرچندسوال بپرسید و جواب های قناعت بخش حاصل نمایید:

- مشتق توابع اکسپوننشیل را بااستفاده از چی میتوان به آسانی به دست آورد؟
- هرگاه یک تابع نمایی مشتق پذیر باشد آیا تابع معکوس آن، یعنی(تابع لوگاریتمی) مشتق پذیر است یا خیر؟ اگر مشتق پذیر است؛ پس مشتق آن چیست؟

معلومات اضافی

لوگاریتم طبیعی $\ln x$: میدانیم که عدد e که به عدد اویلر معروف است از مجموع

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ \dots \ + \frac{1}{n!} + \ \dots$$

به دست آمده؛ همچنان:

$$e = \lim_{x \to \pm\infty} (1 + \frac{1}{x})^x = \lim_{x \to 0^+} (1 + x)^{\frac{1}{x}}$$

در حالیکه مقدار تقریبی عدد e مساوی به ... $e = 2.7182$ است.

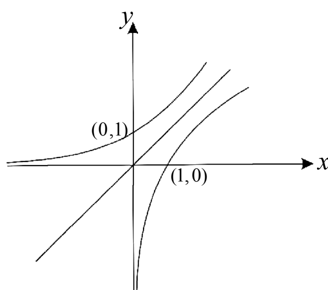
بنا بر این لوگاریتم طبیعی عبارت از لوگاریتمی است که قاعدۀ آن عدد e باشد؛ یعنی: $\log_e x = \ln x$ طوریکه تمام خواص لوگاریتم در آن صدق می‌کند.

- ناحیۀ تعریف تابع لوگاریتمی مساوی است به: $D_f = IR^+$
- ناحیۀ قیمت‌های تابع لوگاریتمی مساوی است به: $R_f = IR$

تابع معکوس تابع $\ln x$ تابع(x) $exponential$ نامیده میشود؛ یعنی: $\ln^{-1} x = e^x = \exp(x)$

خواص توابع اکسپوننشیل قرار ذیل است:

1. ناحیۀ تعریف توابع اکسپوننشیل IR و ناحیۀ قیمت‌های آن IR^+ است.
2. مشتق تابع اکسپوننشیل باز هم عبارت از خود تابع اکسپوننشیل است؛ یعنی: $(e^x)' = e^x$
3. انتیگرال تابع اکسپوننشیل باز هم عبارت از خود تابع اکسپوننشیل است؛ یعنی: $\int e^x dx = e^x + c$
4. تابع اکسپوننشیل متزاید است.



فصل: پنجم

عنوان درس: مشتق توابع اکسپوننشیل و لوگاریتمی

صفحۀ کتاب (178)

ساعت سوم درسی

اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	• شاگردان مفهوم مشتق توابع اکسپوننشیل و لوگاریتمی را خوبتر بفهمند. • شاگردان سؤالها و مثال های مربوط به مشتق توابع اکسپوننشیل و لوگاریتمی را حل کرده بتوانند. • شاگردان به حل سؤالها و مثال های مربوط به توابع اکسپوننشیل و لوگاریتمی علاقه‌مند شوند.
روش های تدریس	سؤال و جواب، کارهای گروهی و انفرادی
مواد ممد درسی	مواد مورد نیاز
توضیح ورودی (5) دقیقه	بعد از داخل شدن به صنف و انجام کارهای مقدماتی که ضروری اندبه ارائۀ درس جدید بپردازید؛ طوریکه در این بخش اگر کدام موضوعی که باعث ایجاد انگیزه برای شاگردان میشود به شکل سؤال از شاگردان بپرسید، در غیر آن این درس باز هم به امتداد درس قبلی است؛ بنا بر این میتوانید بخش ورودی درس قبلی را در این بخش به شکل مکرر توضیح دهید.

فعالیت جریان درس: (28) دقیقه

شاگردان را به گروه‌های مناسب تقسیم نموده و به آنها وظیفه دهید تا مثال سوم صفحۀ(178) کتاب درسی را در گروه‌های شان به مشورۀ هم حل نمایند. در جریان کار گروهی از گروه‌ها نظارت به عمل آرید تا همۀ شاگردان را در کار گروهی سهم فعال داشته باشند. در ختم فعالیت از نمایندۀ یک گروه بخواهید تا فعالیت انجام شدۀ گروهی خویش را روی تخته توضیح نماید؛ اگر توضیحات ارائه شده کاملاً درست بود از گروه های متباقی بخواهید تا کار های گروهی خویش را با آن مقایسه نمایند تا اگرکدام مشکل یا اشتباهی در کار شان موجود باشد به اصلاح آن بپردازند، بعداً مثال‌های چهارم و پنجم صفحۀ(179) کتاب درسی را با سهم گیری فعال شاگردان روی تخته حل کرده توضیح نمایید. در اخیر از یک شاگرد داوطلب بخواهید تا مثال ششم صفحۀ(179) کتاب درسی را با سهم فعال شاگردان روی تخته حل و توضیح نمایند.

(متوجه باشید که شاگردان در جریان کار گروهی از سؤال حل شدۀ کتاب درسی استفاده ننمایند)

تحکیم درس: (7) دقیقه

برای تحکیم درس به شاگردان وظیفه دهید تا مثال‌های هفتم و هشتم صفحۀ(179) کتاب درسی را به شکل انفرادی درکتابچه‌های شان حل نموده و همزمان به آن از یک شاگرد داوطلب بخواهید تا مثال های مذکور را روی تخته حل

نماید. درختم کار انفرادی اگر حل سؤال روی تخته کاملاً درست بود از همهٔ شاگردان بخواهید تا حل سؤال کتابچه‌های خویش را با حل تخته مقایسه نمایند تا اگر کدام اشتباهی در سؤال حل شدهٔ شان موجود باشد به اصلاح آن بپردازند.

(متوجه باشید که شاگردان در جریان کار انفرادی از سؤال حل شدهٔ کتاب درسی استفاده ننمایند).

ارزیابی ختم درس: (5) دقیقه

برای اینکه مطمئن شوید آیا شاگردان این درس را خوب فرا گرفته اند یا خیر؟ میتوانید از یک شاگرد داوطلب بخواهید تا یکی از سؤالهای مثال نهم صفحهٔ(179) کتاب درسی را روی تخته حل نماید و دو سؤال متباقی آن را به شاگردان وظیفه دهید تا در خانه‌های خویش حل نمایند.

معلومات اضافی

مشتق تابع لوگاریتمی: مشتق تابع لوگاریتمی را میتوان با استفاده از تعریف مشتق به دست آورد:

$$f(x) = \ln x$$

تعریف مشتق

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to x_0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{Ln(x+\Delta x) - Ln\, x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{Ln\frac{(x+\Delta x)}{x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{Ln(1+\frac{\Delta x}{x})}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \ln(1+\frac{\Delta x}{x})^{\frac{1}{\Delta x}}$$

هرگاه $\Delta x = \frac{1}{4}$ فرض شود:

$$\begin{cases} \Delta x = \frac{1}{u} & {}^{\Delta x \to 0}_{u \to 0} \\ u = \frac{1}{\Delta x} \end{cases} \qquad f'(x) = \lim_{u \to 0} \ln(1+\frac{1}{x^u})^u$$

حال به کمک قاعدهٔ $\lim_{u \to \infty}(1+\frac{k}{u})^u = e^k$ میتوان نوشت:

$$f'(x) = \ln e^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x}\ln e = \frac{1}{x}$$

بنابر آن میتوان گفت که اگر $f(x) = \ln u$ باشد و u تابع از x باشد؛ بنابر این مشتق آن مساوی است به:

$$f'(x) = \frac{u'}{u}$$

مشتق تابع لوگاریتمی

$$y = \log_a u \quad y = \frac{\log_e u}{\log_e a} = \frac{\ln u}{\ln a}$$

$$y = \frac{(\ln u')}{\ln a} = \frac{u'}{u \ln a}$$

مثلاً:

$$y=e^x \Rightarrow \ln y=\ln e^x \Rightarrow \ln y=x\ln e \Rightarrow \ln y=x \Rightarrow (\ln y')=(x)' \Rightarrow \frac{y'}{y}=1 \Rightarrow y'=y$$

$$y'=e^x$$

جواب به سؤال های تمرین

مشتق توابع زیر را دریابید:

$a)\ f(x)=\ln\sin 3x$ $\quad b)\ f(x)=\ln\sqrt{3x^2+7}$

$c)\ f(x)=\ln(5x^2-6x+5)$ $\quad d)\ f(x)=\log_{10}3x^2$

$e)\ f(x)=y=x^x$ $\quad f)\ y=\dfrac{(x+1)^2(\sqrt{x-1})}{(x+4)^3e^x}$

حل $a)$:

$$f(x)=\ln\sin 3x \qquad \Rightarrow f'(x)=?$$

$$\{g(x)=\sin 3x \quad \Rightarrow \quad g'(x)=\cos 3x\cdot 3=3cox3x$$

$$f(x)=\ln\sin 3x=\ln g(x) \ \Rightarrow\ f'(x)=\frac{g'(x)}{g(x)}=\frac{3\cos 3x}{\sin 3x} \ \Rightarrow\ f'(x)=3\cot 3x$$

حل $b)$:

$$f(x)=\ln\sqrt{3x^2+7}$$

$$\begin{cases} g(x)=\sqrt{3x^2+7}=(3x^2+7)^{\frac{1}{2}} \\ g'(x)=\frac{1}{2}(3x^2+7)^{\frac{1}{2}}==\frac{1}{2}(3x^2+7)^{\frac{1}{2}-1}(6x)=\frac{6x}{2}(3x^2+7)^{-\frac{1}{2}}=\frac{3x}{(3x^2+7)^{\frac{1}{2}}}=\frac{3x}{\sqrt{(3x^2+7)}} \end{cases}$$

$$f(x)=\ln\sqrt{3x^2+7}=\ln g(x) \ \Rightarrow\ f'(x)=\frac{g'(x)}{g(x)}=\frac{\frac{3x}{\sqrt{3x^2+7}}}{\sqrt{3x^2+7}}=\frac{3x}{(\sqrt{3x^2+7})(\sqrt{3x^2+7})}$$

$$=\frac{3x}{(\sqrt{3x^2+7})^2} \ \Rightarrow\ f'(x)=\frac{3x}{3x^2+7}$$

حل $c)$:

$$f(x)=\ln(5x^2-6x+5)$$

$$\begin{cases} g(x)=(5x^2-6x+5) \\ g'(x)=10x-6 \end{cases}$$

$$f(x)=\ln(5x^2-6x+5)=\ln g(x) \qquad \Rightarrow \qquad f'(x)=\frac{g'(x)}{g(x)}=\frac{10x-6}{5x^2-6x+5}$$

حل d):

$$f(x)=\log_{10}^{3x^2}$$

$$\begin{cases} u=3x^2 \Rightarrow \\ u'=6x \quad , \quad a=10 \end{cases}$$

$$f'(x)=(\log_a^u)'=\frac{u'}{u}\log_a^e=\frac{u'}{u\log_e^a}=\frac{u'}{u\ln a}$$

$$f'(x)=(\log_{10}^{3x^2})'=\frac{6x}{3x^2}\cdot\log_{10}^e=\frac{6x}{3x^2\ln 10}=\frac{2}{x\ln 10}$$

حل e):

$$f(x)=y=x^x$$

$$\ln y=\ln x^x \quad \Rightarrow \ln y=x\cdot\ln x$$

$$(\ln y)'=(x\ln x)' \quad \Rightarrow \frac{y'}{y}=(x\cdot\ln x)' \quad \Rightarrow \frac{y'}{y}=(x)'\ln x+x(\ln x)'$$

$$\Rightarrow \frac{y'}{y}=\ln x+x\frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{y'}{y}=\ln x+1$$

$$\Rightarrow y'=(\ln x+1)\cdot y \quad \Rightarrow \quad y'=(\ln x+1)(x^x) \quad \Rightarrow \quad f'(x)=x^x\ln x$$

حل f):

$$y=(\frac{(x+1)^2(\sqrt{x-1})}{(x+4)^3e^x})$$

$$\ln y=\ln(\frac{(x+1)^2(\sqrt{x-1})}{(x+4)^3e^x}) \quad \Rightarrow \ln y=\ln\left[(x+1)^2(\sqrt{x-1})\right]-\ln\left[(x+4)^3e^x\right]$$

$$\ln y=\ln(x+1)^2+\ln(\sqrt{x-1})-\left[\ln(x+4)^3+\ln e^x\right]$$

$$\ln y=\ln(x+1)^2+\ln(x-1)^{\frac{1}{2}}-\ln(x+4)^3-\ln e^x$$

$$\ln y=2\ln(x+1)+\frac{1}{2}\ln(x-1)-3\ln(x+4)-x\ln e$$

$$\ln y=2\ln(x+1)+\frac{1}{2}\ln(x-1)-3\ln(x+4)-x$$

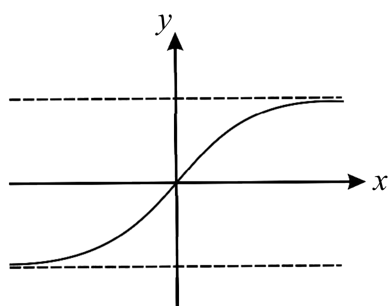
$$(\ln y)'=\left[2\ln(x+1)+\frac{1}{2}\ln(x-1)-3\ln(x+4)-x\right]'$$

$$\frac{y'}{y}=2\cdot\frac{(x+1)'}{(x+1)}+\frac{1}{2}\cdot\frac{(x-1)'}{(x-1)}-3\cdot\frac{(x+4)'}{(x+4)}-1$$

$$\frac{y'}{y}=\frac{2}{x+1}+\frac{1}{2(x-1)}-\frac{3}{(x+4)}-1$$

$$y'=(\frac{2}{x+1}+\frac{1}{2(x+1)}-\frac{3}{(x+4)}-1)\cdot y$$

$$y'=(\frac{2}{x+1}+\frac{1}{2(x-1)}-\frac{3}{x+4}-1)\cdot\left[\frac{(x+1)^2(\sqrt{x-1})}{(x+4)^3\cdot e^x}\right]$$



فصل :پنجم

عنوان درس: مشتق توابع معکوس

صفحهٔ کتاب (184-181)

وقت تدریس(یک ساعت درسی)

اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	• شاگردان مفهوم مشتق توابع معکوس را بفهمند. • شاگردان سؤالها و مثال های مربوط به مشتق توابع معکوس و مشتق توابع معکوس مثلثاتی را حل کرده بتوانند. • شاگردان از حل سؤالها و مثال های مربوط به مشتق توابع معکوس و مشتق توابع معکوس مثلثاتی علاقه‌مند شده و احساس خوشی نمایند.
روش های تدریس	سؤال و جواب، کارهای گروهی و انفرادی
مواد ممد درسی	چارت بخش ورودی
توضیح ورودی (5) دقیقه	بعد از داخل شدن به صنف و انجام کارهای مقدماتی تدریس به ارائهٔ درس جدید بپردازید. چارت شکل ورودی را در مقابل صنف اویزان نموده و سؤال مربوطه آن را از شاگردان بپرسید. شاگردان را طوری تشویق و رهنمایی نمایید تا جواب های درست را ارائه نمایند در غیر آن بگویید شکل مقابل یک تابع متصل بوده و معکوس تابع $y=\tan x$ است؛ زیرا دومین تابع تابع مذکور کودومین $y=\tan x$ بوده و کودومین این تابع دومین تابع $y=\tan x$ است.

فعالیت جریان درس: (28) دقیقه

شاگردان را به گروه‌های مناسب تقسیم نموده و به آنها وظیفه دهید تا مثال صفحهٔ(181) کتاب درسی را درگروه های شان به مشورهٔ هم حل نمایند .در جریان کار گروهی از گروه‌ها نظارت به عمل آرید تا همهٔ شاگردان تشویق شده درکارگروهی سهم فعال داشته باشند. در ختم فعالیت از نمایندهٔ یک گروه بخواهید تا کارگروهی خویش را روی تخته توضیح نماید و از گروه های متباقی بخواهید تا کار های گروهی خویش را با آن مقایسه نمایند تا اگر اشتباهات در کار شان موجود باشد به اصلاح آن بپردازند در صورتی که فعالیت ارائه شده درست انجام شده باشد؛ بعداً خود تان چهار رابطهٔ مشتق توابع مثلثاتی صفحهٔ(183–181) کتاب درسی را با سهم فعال شاگردان روی تخته ثبوت و توضیح نمایید.(متوجه باشید که شاگردان در جریان کارگروهی از سؤال حل شدهٔ کتاب درسی استفاده ننمایند)

تحکیم درس: (7) دقیقه

برای تحکیم درس مثال های اول و دوم صفحهٔ(183) کتاب درسی را به شاگردان وظیفه دهید تا در کتابچه‌های شان به شکل انفرادی حل نمایند. همزمان به آن از یک شاگرد داوطلب بخواهید تا مثال های مذکور را روی تخته حل نماید. در ختم کار انفرادی اگر حل سؤال روی تخته کاملاً درست بود از همهٔ شاگردان بخواهید تا حل سؤال کتابچه های خویش را با حل سؤال روی تخته مقایسه نمایند تا اگرکدام مشکل یا اشتباهی در حل شان موجود باشد آنرا اصلاح نمایند.

(متوجه باشید که شاگردان در جریان کار انفرادی از سؤال حل شدۀ کتاب درسی استفاده ننمایند).

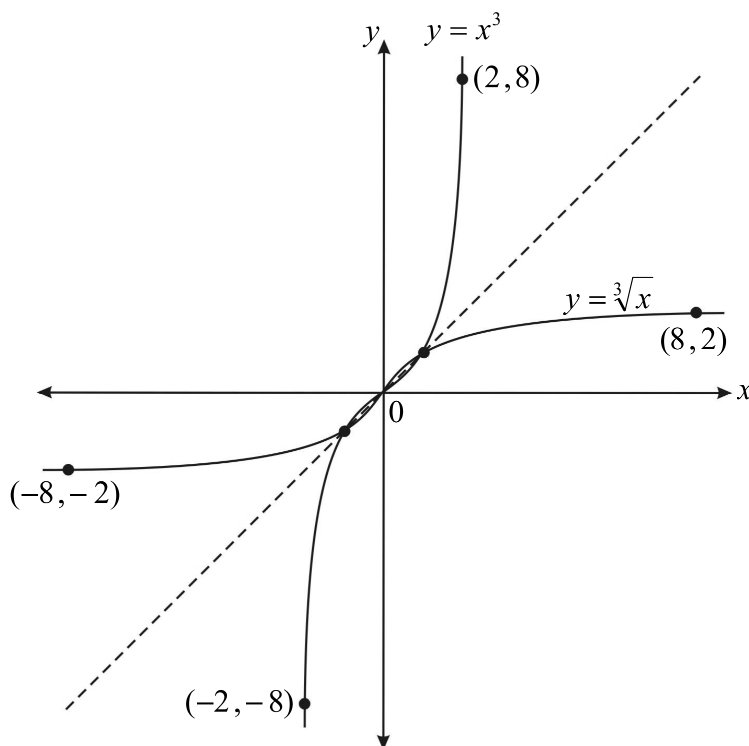
ارزیابی ختم درس: (5) دقیقه

برای اینکه مطمئن شوید آیا شاگردان این درس را خوب فرا گرفته اند یا خیر؟ از یک شاگرد داوطلب بخواهید تا مثال سوم صفحۀ(183) کتاب درسی را با سهم گیری فعال شاگردان دیگر روی تخته حل و توضیح نماید.

معلومات اضافی

تابع معکوس: متناظر هر تابع یک به یک؛ مانند: $y = f(x)$ در یک انتروال تابع جدیدی که به شکل $y = f^{-1}(x)$ نمایش داد می‌شود به نام تابع معکوس $f(x)$ یاد می گردد، تعریف میشود؛ ناحیۀ تعریف و ناحیۀ قیمت‌های تابع جدید قرار ذیل است: $D_{f^{-1}} = R_f \quad \wedge \quad R_{f^{-1}} = D_f$

برای دریافت تابع معکوس یک تابع؛ مانند: $y = f(x)$ طوری می‌نویسیم که $x = f(y)$ باشد؛ سپس y را بر حسب x حل مینماییم؛ مثلاً $y = x^3$ را به شکل $x = y^3$ می‌نویسیم بنا بر آن $y = \sqrt[3]{x}$ گردیده گراف تابع $y = x^3$ و تابع معکوس $y = \sqrt[3]{x}$ قرار ذیل است:



$y = x^3$

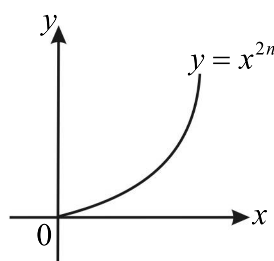
$x = y^3$

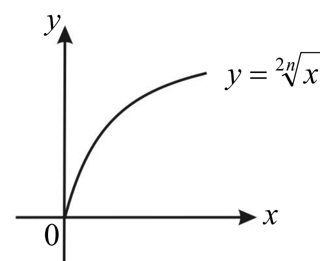
$y = \sqrt[3]{x}$

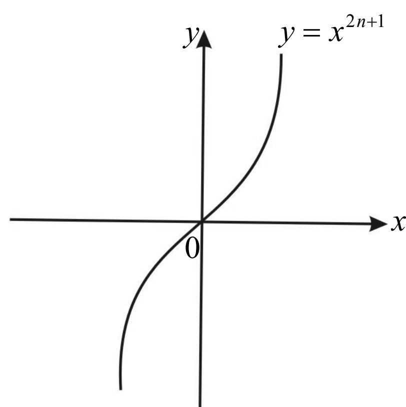
$\sqrt[3]{x}$	y
0	0
1	1
−1	−1
8	2
−8	−2

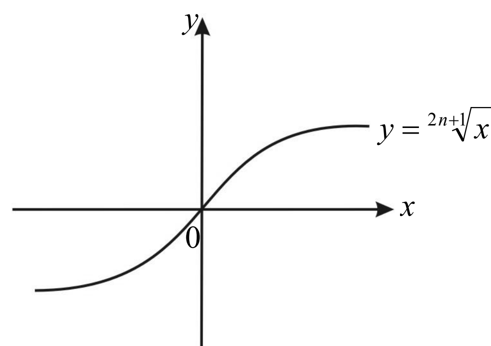
x	y
0	0
1	1
−1	−1
2	8
−2	−8

توابع معکوس توابع چند حده درجه n؛ مانند: x^{2n} و x^{2n+1} به ترتیب $\sqrt[2n]{x}$ و $\sqrt[2n+1]{x}$ است طوریکه گراف های آن قرار ذیل است:









بنابر این بخش ورودی گراف تابع معکوس $f(x) = x^3$ است؛ یعنی $f^{-1}(x) = x^{\frac{1}{3}}$ است.

برای معلومات شما در این قسمت قضیه را بیان مینمایم که بر اساس آن ارتباط بین مشتق تابع f و مشتق تابع معکوس آن یعنی f^{-1} مطرح میگردد.

قضیهٔ مشتق تابع معکوس: اگر تابع f در مجاورت نقطهٔ a متمادی و یک به یک بوده و $f'(a)$ موجود بوده و خلاف صفر باشد در این صورت تابع معکوس آن f^{-1} در نقطه $b = f(a)$ مشتق پذیر است؛ طوریکه:

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}$$

در حالیکه $a = f'(b)$ است.

جواب به سؤال های تمرین

مشتق توابع زیر را دریابید:

1) $y = (arc\sin x)^3$ 2) $y = \log_2(arc\cos x)$

حل 1):

$$y = (arc\sin x)^3 \Rightarrow y' = ?$$

$$y' = 3(arc\sin x)^2 \cdot (arc\sin x)' \Rightarrow y' = 3(arc\sin x)^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow y' = \frac{3(arc\sin x)^2}{\sqrt{1-x^2}}$$

حل 2):

$$y = \log_2(arc\cos x) \Rightarrow y' = ?$$

$$\because \{arc\cos x = u \Rightarrow y = \log_2^u \Rightarrow y' = \frac{u'}{u\ln 2}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{(arc\cos x)'}{arc\cos x \cdot \ln 2} = \frac{-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{arc\cos x \cdot \ln 2}$$

$$\Rightarrow y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{1}{arc\cos x \cdot \ln 2}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{-1}{(\sqrt{1-x^2})(arc\cos x)(\ln 2)}$$

فصل پنجم

$$\frac{2}{x+1}+\frac{1}{x^2-1}=\frac{2x-1}{x^2-1}$$

عنوان درس: تجزیهٔ یک کسر به کسور قسمی

صفحهٔ کتاب (186-185)

وقت تدریس(دو ساعت درسی) ساعت اول درسی

اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	• شاگردان مفهوم تجزیهٔ یک کسر به کسور قسمی را بفهمند. • شاگردان سؤالها ومثال های مربوط به تجزیهٔ یک کسر به کسور قسمی را حل کرده بتوانند. • شاگردان از حل سؤالها و مثال های مربوط به تجزیهٔ یک کسر به کسور قسمی علاقه‌مند شده و احساس خوشی نمایند.
روش های تدریس	سؤال و جواب، کارهای گروهی و انفرادی
مواد ممد درسی	چارت بخش ورودی
توضیح ورودی (5) دقیقه	بعد از داخل شدن به صنف و انجام کارهای مقدماتی تدریس که ضروری اند به ارائهٔ درس جدید بپردازید. چارت شکل ورودی را در مقابل صنف آویزان نموده و سؤال مربوطه آن را از شاگردان بپرسید. شاگردان را طوری تشویق و رهنمایی نمایید تا جواب های درست را ارائه نمایند در غیرآن میتوانید تشریحات لازم را قرار ذیل ارائه نمایید: اگر این دوکسر را با هم جمع نماییم کسر طرف دیگر مساوات به دست می‌آید، در حالیکه برعکس آن ممکن نیست، یعنی اگر کسر به طرف راست مساوات را تجزیه نماییم کسور طرف چپ مساوات به دست نمی آیند.

فعالیت جریان درس: (28) دقیقه

شاگردان را به گروه‌های مناسب تقسیم نموده و آنها را وظیفه دهید تا فعالیت صفحهٔ(185) کتاب درسی را در گروه های شان به مشورهٔ هم انجام دهند. در جریان فعالیت گروهی از گروه‌ها نظارت به عمل آرید تا همهٔ شاگردان را تشویق نمایید که در کار گروهی خویش سهم فعال داشته باشند. در ختم فعالیت از نمایندهٔ یک گروه بخواهید تا فعالیت انجام شدهٔ گروهی خویش را روی تخته کار نماید و از گروه های متباقی بخواهید تا کار های گروهی خویش را با آن مقایسه نمایند تا اگر اشتباهات در کار گروهی شان موجود باشد به اصلاح آن بپردازند. بعداً تعریف صفحهٔ(185)کتاب درسی را با حالت اول آن با سهم گیری فعال شاگردان روی تخته تشریخ و توضیح نمایید.

تحکیم درس: (7) دقیقه

برای تحکیم درس مثال اول صفحهٔ(185)کتاب درسی را به شاگردان وظیفه دهید تا به شکل انفرادی در کتابچه‌های خویش حل نمایند وهمزمان به آن از یک شاگرد داوطلب بخواهید تا مثال مذکور را روی تخته حل نماید و آنها را رهنمایی به حل سؤال نمایید. در ختم کار انفرادی از همهٔ شاگردان بخواهید تا حل سؤال کتابچه‌های خویش را با حل

سؤال روی تخته مقایسه نمایند تا اگر اشتباهات در کار شان موجود باشد آنرا اصلاح نمایند.
(در جریان کار انفرادی متوجه باشید که شاگردان از سؤال حل شدۀ کتاب درسی استفاده ننمایند)

ارزیابی ختم درس: (5) دقیقه

برای اینکه مطمئن شوید که آیا شاگردان این درس را خوب فرا گرفته اند یا خیر؟ از یک شاگرد داوطلب بخواهید تا مثال دوم صفحۀ (186)کتاب درسی باسهم فعال شاگردان و رهنمایی شما روی تخته حل و توضیح نماید.

معلومات اضافی

$$\frac{1}{x^2-1}+\frac{2}{x+1}=\frac{1+2(x-1)}{x^2-1}=\frac{1+2x-2}{x^2-1}=\frac{2x-1}{x^2-1}$$

اگر نظر به تجزیه به کسور قسمی این کسر را تجزیه نماییم داریم که:

$$\frac{2x-1}{(x^2-1)}=\frac{A}{(x+1)}+\frac{B}{(x-1)}$$

$$=\frac{A(x-1)+B(x+1)}{(x-1)(x+1)}=\frac{Ax-A+Bx+B}{(x^2-1)}=\frac{(A+B)x+(B-A)}{(x^2-1)}$$

چون مخرج‌ها باهم مساوی اند؛ بنا بر آن صورت‌ها نیز مساوی اند ؛ پس:

$$2x-1=(A+B)x+(B-A)$$

$$\begin{cases} A+B=2 \quad \Rightarrow B=2-A \\ B-A=-1 \quad \Rightarrow 2-A-A=-1 \quad \Rightarrow -2A+2=-1 \quad \Rightarrow -2A=-1-2 \;\Rightarrow -2A=-3 \end{cases}$$

$$A=\frac{-3}{-2}=\frac{3}{2}\Rightarrow \boxed{A=\frac{3}{2}}$$

$$B=2-A \quad \Rightarrow \quad B=2-\frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad B=\frac{4-3}{2}=\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{B=\frac{1}{2}}$$

$$\frac{2x-1}{(x^2-1)}=\frac{A}{(x+1)}+\frac{B}{(x-1)}$$

$$=\frac{\frac{3}{2}}{(x+1)}+\frac{\frac{1}{2}}{(x-1)}=\frac{3}{2(x+1)}+\frac{1}{2(x-1)}$$

برای اینکه امتحان نماییم که سؤال صحیح حل شده یا خیر؟ کسور قسمی به دست آمده را جمع نموده و صحت مساوات را به دست می‌آوریم:

$$\frac{3}{2(x+1)}+\frac{1}{2(x-1)}=\frac{3(x-1)+(x+1)}{2(x+1)(x-1)}=\frac{3x-3+x+1}{2(x^2-1)}=\frac{4x-2}{2(x^2-1)}$$

$$=\frac{2(2x-1)}{2(x^2-1)}=\frac{2x-1}{x^2-1}$$

کسرواقعی :کسری که درجۀ صورت آن از درجۀ مخرج آن کمتر باشد؛ مثلا: $\dfrac{ax^2+bx+c}{ax^4+bx^2+cx+d}$

بنام کسر واقعی یاد میشود. متوجه باشید اگر یک کسر، کسر واقعی نباشد، اول باید صورت کسر را تقسیم مخرج نموده و سپس قسمت واقعی کسر را به کسور قسمی آن تجزیه نمایید؛ مثلاً:

$$\frac{x^3+3}{x^2-1}=?$$

$$x^3+3 \,\Big|\, \frac{x^2-1}{x}$$

$$\frac{-x^3 \mp x}{x+3}$$

$$\frac{x^3+3}{x^2-1}=x+\frac{x+3}{x^2-1}$$

$$\frac{x+3}{x^2-1}=\frac{x+3}{(x+1)(x-1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-1}$$

$$=\frac{A(x-1)+B(x+1)}{(x-1)(x+1)}=\frac{Ax-A+Bx+B}{(x^2-1)}=\frac{(A+B)x+(-A+B)}{(x^2-1)}$$

چون مخرج‌ها باهم مساوی اند؛ بنا بر آن صورت‌ها نیز باهم مساوی اند:

$$x+3=(A+B)x+(-A+B)$$

$$\begin{cases} A+B=1 \\ -A+B=3 \end{cases} \qquad \begin{array}{r} A+B=1 \\ \mp A \pm B = _3 \\ \hline 2A=-2 \\ A=\frac{-2}{2} \\ \boxed{A=-1} \end{array} \qquad \wedge \qquad \begin{array}{l} A+B=1 \\ -1+B=1 \\ B=1+1 \\ \boxed{B=2} \end{array}$$

$$\frac{x+3}{x^2-1}=\frac{A}{(x+1)}+\frac{B}{(x-1)}=\frac{-1}{(x+1)}+\frac{2}{(x-1)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x^3+3}{x^2-1}=x-\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x-1}$$

$$\frac{2}{x+1}+\frac{1}{x^2-1}=\frac{2x-1}{x^2-1}$$

فصل پنجم

عنوان درس: تجزیه یک کسر به کسور قسمی

صفحهٔ کتاب (188-187)

ساعت دوم درسی

اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	• شاگردان مفهوم تجزیهٔ یک کسر به کسور قسمی را بفهمند. • شاگردان سؤالها و مثال های مربوط به تجزیهٔ یک کسر به کسور قسمی را حل کرده بتوانند. • شاگردان به حل سؤالها و مثال های مربوط به تجزیهٔ یک کسر به کسور قسمی علاقه-مند شده و احساس خوشی نمایند.
روش های تدریس	سؤال و جواب، کارهای گروهی و انفرادی
مواد ممد درسی	مواد مورد نیاز
توضیح ورودی (5) دقیقه	بعد از داخل شدن به صنف و انجام کارهای مقدماتی تدریس که ضروری اند به ارائه درس جدید بپردازید و اگر در این بخش کدام موضوعی که باعث ایجاد انگیزه در شاگردان میشود به شکل سؤال از شاگردان بپرسید، در غیر آن این درس به ارائه درس قبلی است؛ بنا بر این میتوانید بخش ورودی درس قبلی را در این بخش به شکل مکرر توضیح نمایید.

فعالیت جریان درس: (28) دقیقه

اول حالت دوم تجزیهٔ یک کسر به کسور قسمی را که در صفحهٔ(187)کتاب درسی موجود است با سهم گیری فعال شاگردان روی تخته توضیح و تشریح نمایید. دوم شاگردان را به گروه‌های مناسب تقسیم نموده وبه آنها وظیفه دهید تا مثال صفحهٔ(187)کتاب درسی را در گروه‌های خویش به مشورهٔ هم حل نمایند. در جریان کار گروهی از گروه ها نظارت به عمل آرید تا همه شاگردان در کار گروهی سهم فعال داشته باشند. درختم کار گروهی از نمایندهٔ یک گروه بخواهید تا کار گروهی خویش را روی تخته توضیح نماید؛ اگر کار گروهی درست انجام گردیده بود از گروه های متباقی بخواهید تا کار های گروهی خویش را با آن مقایسه نمایند تا اگر اشتباهات در کار شان باشد به اصلاح آن بپردازند. بعداًحالت سوم تجزیهٔ یک کسر به کسور قسمی که در صفحهٔ(187)کتاب درسی موجود است با سهم فعال شاگردان روی تخته توضیح و تشریح نمایید.

(متوجه باشید که شاگردان در جریان کار گروهی از سؤال حل شدهٔ کتاب درسی استفاده ننمایند)

تحکیم درس: (7) دقیقه

برای تحکیم درس به شاگردان وظیفه دهید تا مثال مربوط به حالت سوم تجزیهٔ یک کسر به کسور قسمی صفحهٔ(187) کتاب درسی را به شکل انفرادی در کتابچه‌های شان حل نموده و همزمان به آن از یک شاگرد داوطلب بخواهید تا مثال مذکور را روی تخته حل نماید. درختم کار انفرادی اگر حل سؤال روی تخته درست بود از همهٔ شاگردان بخواهید تا حل سؤال کتابچه های خویش را با حل سؤال روی تخته مقایسه نمایند تا اگراشتباهات در سؤال حل شدهٔ

شان موجود باشد به اصلاح آن بپردازند.

(متوجه باشید که شاگردان در جریان کار انفرادی از سؤال حل شدۀ کتاب درسی استفاده ننمایند).

ارزیابی ختم درس: (5) دقیقه

برای اینکه مطمئن شوید آیا شاگردان این درس را خوب فرا گرفته اند یا خیر؟ از شاگردان قرار زیر چند سؤال بپرسید و جواب های قناعت بخش حاصل نمایید:

- کی میتواند حالت اول تجزیۀ یک کسر به کسور قسمی را بیان نماید؟
- کی میتواند حالت دوم تجزیۀ یک کسر به کسور قسمی را بیان نماید؟
- کی میتواند حالت سوم تجزیۀ یک کسر به کسور قسمی را بیان نماید؟

معلومات اضافی

تجزیه به کسور قسمی: یک کسر واقعی را میتوانیم به چند کسر واقعی دیگر طوری تجزیه نماییم که از حاصل جمع این کسور قسمی کسر اولی به دست آید.

طریقۀ تجزیۀ یک کسر به کسور قسمی آن :برای تجزیۀ یک کسر به کسور قسمی آن میتوان در این جا چهار حالت را ذکر نمود:

حالت اول: هرگاه عوامل ضربی، مخرج پولینومهای درجه اول باشد و تکرار نشوند؛ بنا بر این مطابق به هر عامل ضربی که در یک کسر قسمی وجود دارد صورت آن یک عدد ثابت است؛ مانند:

$$\frac{5x+2}{(x+2)(3x-2)}=\frac{A}{(x+2)}+\frac{B}{(3x-2)}=\frac{A(3x-2)+B(x+2)}{(x+2)(3x-2)}$$

$$=\frac{3Ax-2A+Bx+2B}{(x+2)(3x-2)}=\frac{(3A+B)x+(2B-2A)}{(x+2)(3x-2)}$$

$$5x+2=(3A+B)x+(2B-2A)$$

$$\begin{cases}3A+B=5\\ 2B-2A=2 \;\Rightarrow\; 2(B-A)=2 \;\Rightarrow\; B-A=\frac{2}{2} \;\Rightarrow\; B-A=1 \;\Rightarrow\; B=1+A\end{cases}$$

$$3A+B=5 \;\Rightarrow\; 3A+(1+A)=5 \Rightarrow 4A+1=5 \Rightarrow\; 4A=5-1$$

$$\Rightarrow\; 4A=4 \;\Rightarrow A=\frac{4}{4} \;\Rightarrow \boxed{A=1}$$

$$B-A=1 \;\Rightarrow\; B-1=1 \;\Rightarrow\; B=1+1 \;\Rightarrow\; \boxed{B=2}$$

$$\frac{5x+2}{(x+2)(3x-2)}=\frac{A}{(x+2)}+\frac{B}{(3x-2)}=\frac{1}{(x+2)}+\frac{2}{(3x-2)}$$

حالت دوم: عوامل ضربی مخرج، پولینومهای درجه اول بوده و بعضی از آنها تکرار میشوند؛ مثلاً اگر یک پولینوم درجه اول $ax+b$ را در نظر گیریم؛ طوریکه n دفعه به حیث عامل ضربی مخرج یک کسر آمده باشد در این صورت n کسر قسمی کسر مذکور طور ذیل موجود است:

$$\frac{A_1}{ax+b}+\frac{A_2}{(ax+b)^2}+\ \dots\ +\frac{A_n}{(ax+b)^n}$$

مثلاً:

$$\frac{3x-1}{(x+4)^2}=\frac{A_1}{(x+4)}+\frac{A_2}{(x+4)^2}=\frac{A_1(x+4)+A_2}{(x+4)^2}=\frac{A_1x+4A_1+A_2}{(x+4)^2}$$

$$3x-1=A_1x+4A_1+A_2$$

$$\begin{cases}\boxed{A_1=3}\\ 4A_1+A_2=-1 \Rightarrow 4(3)+A_2=-1 \Rightarrow 12+A_2=-1 \Rightarrow A_2=-1-12\end{cases}$$

$$\boxed{A_2=-13}$$

$$\frac{3x-1}{(x+4)^2}=\frac{A_1}{(x+4)}+\frac{A_2}{(x+4)^2}=\frac{3}{(x+4)}+\frac{-13}{(x+4)^2}$$

حالت سوم: عوامل ضربی مخرج، پولینوم‌های درجه دوم می‌باشند که قابل تجزیه به پولینوم‌های درجه اول نیستند وتکرار هم نمی‌شوند؛ مثلاً: اگر یک پولینوم درجه دوم غیر قابل تجزیه ax^2+bx+c، یک عامل مخرج یک کسر باشد در این صورت کسر قسمی کسر مذکور به شکل $\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$ است.

مثلاً:

$$\frac{2}{(x-1)(x^2+x-4)}=\frac{A}{(x-1)}+\frac{Bx+C}{x^2+x-4}$$

$$=\frac{A(x^2+x-4)+(Bx+C)(x-1)}{(x-1)(x^2+x-4)}=\frac{Ax^2+Ax-4A+Bx^2-Bx+Cx-C}{(x-1)(x^2+x-4)}$$

$$=\frac{(A+B)x^2+(A-B+C)x-(4A+C)}{(x-1)(x^2+x-4)}$$

$$2=(A+B)x^2+(A-B+C)x-(4A+C)$$

$$\begin{cases}A+B=0 \Rightarrow B=-A\\ A-B+C=0 \Rightarrow A-(-A)+C=0 \Rightarrow 2A+C=0 \Rightarrow \boxed{C=-2A}\\ -4A-C=2 \Rightarrow -4A-(-2A)=2 \Rightarrow -4A+2A=2 \Rightarrow -2A=2 \Rightarrow A=\frac{-2}{2} \Rightarrow \boxed{A=-1}\end{cases}$$

$$B=-A \Rightarrow B=-(-1)=1 \Rightarrow \boxed{B=1}$$

$$C=-2A \Rightarrow C=-2(-1) \Rightarrow \boxed{C=2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{2}{(x-1)(x^2+x-4)}=\frac{A}{(x-1)}+\frac{Bx+C}{(x^2+x-4)}$$

$$=\frac{-1}{(x-1)}+\frac{(1)(x)+2}{(x^2+x-4)}=\frac{x+2}{(x^2+x-4)}-\frac{1}{(x-1)}$$

حالت چهارم: عوامل ضربی، مخرج پولینوم‌های درجه دوم را در برداشته که قابل تجزیه به پولینوم‌های درجه اول نبوده و بعضی از آنها تکرار میشوند؛ مثلاً: اگر یک پولینوم درجه دوم غیر قابل تجزیهٔ ax^2+bx+c را در نظر بگیریم طوریکه n دفعه به حیث عامل ضربی مخرج کسرآمده باشد درین صورت n کسور قسمی کسر مذکور طور ذیل موجود اند:

$$\frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c}+\frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2}+\ ...\ +\frac{A_nx+B_n}{(ax^2+bx+c)^n}$$

جواب به سؤال های تمرین

کسرهای زیر را به کسور قسمی تجزیه نمایید:

بخش اول:

$$a)\ \frac{-x^2+2x-12}{x^3+2x^2+6x+5} \qquad b)\ \frac{4x^2-3x+8}{x^3-2x+4} \qquad c)\ \frac{2x^4-8x^3+7x^2-3x+4}{x^2-9x+3}$$

حل $a)$

$$\frac{-x^2+2x-12}{x^3+2x^2+6x+5}=\frac{-x^2+2x-12}{(x^2+x+5)(x+1)}=\frac{Ax+B}{x^2+x+5}+\frac{C}{x+1}$$

$$=\frac{(Ax+B)(x+1)+C(x^2+x+5)}{(x^2+x+5)(x+1)}$$

$$=\frac{Ax^2+Ax+Bx+B+Cx^2+Cx+5C}{(x^2+x+5)(x+1)}$$

$$=\frac{(A+C)x^2+(A+B+C)x+(B+5C)}{(x^2+x+5)(x+1)}$$

$$\begin{cases} A+C=-1 \\ A+B+C=2 \ \Rightarrow -1+B=2 \ \Rightarrow B=2+1 \ \Rightarrow \boxed{B=3} \\ B+5C=-12 \ \Rightarrow 3+5(C)=-12 \ \Rightarrow 5C=-12-3 \ \Rightarrow 5C=-15 \ \Rightarrow C=\frac{-15}{5} \ \Rightarrow \boxed{C=-3} \end{cases}$$

$$A+C=-1 \ \Rightarrow A-3=-1 \ \Rightarrow A=-1+3 \ \Rightarrow \boxed{A=2}$$

$$\frac{-x^2+2x-12}{x^2+2x^2+6x+5}=\frac{Ax+B}{x^2+x+5}+\frac{C}{x+1}=\frac{2x+3}{(x^2+x+5)}-\frac{3}{(x+1)}$$

حل $b)$

$$\frac{4x^2-3x+8}{x^3-2x+4}=?$$

$$x^3-2x+4=(x+2)(x^2-2x+2)$$

$$\begin{array}{r|l} x^3-2x+4 & x+2 \\ \hline \underline{{}_-x^3 \pm 2x^2} & x^2-2x+2 \\ -2x^2-2x & \\ \underline{\mp 2x^2 \mp 4x} & \\ 2x+4 & \\ \underline{{}_-2x \pm 4} & \\ 0 & \end{array}$$

$$\frac{4x^2-3x+8}{x^3-2x+4}=\frac{4x^2-3x+8}{(x+2)(x^2-2x+2)}=\frac{A}{(x+2)}+\frac{Bx+C}{x^2-2x+2}$$

$$=\frac{A(x^2-2x+2)+(Bx+C)(x+2)}{(x+2)(x^2-2x+2)}=\frac{Ax^2-2Ax+2A+Bx^2+2Bx+Cx+2C}{x^3-2x^2+2x+2x^2-4x+4}$$

$$=\frac{(A+B)x^2+(-2A+2B+C)x+(2A+2C)}{x^3-2x+4}$$

$$\begin{cases} A+B=4 \Rightarrow (A+B)\cdot 2=4\cdot 2 \Rightarrow 2A+2B=8 \;\dots\; \mathrm{I} \\ -2A+2B+C=-3 \qquad\qquad -2A+2B+C=-3 \\ 2A+2C=8 \Rightarrow 2C=8-2A \qquad -2A+2B+4-A=-3 \\ \qquad C=\frac{8}{2}-\frac{2A}{2} \qquad\qquad -3A+2B=-3-4 \end{cases}$$

$$\boxed{C=4-A} \qquad -3A+2B=-7 \;\dots\; \mathrm{II}$$

$$\underline{\pm 2A \pm 2B = _8 \;\dots\; \mathrm{I}}$$

$$-5A=-15 \Rightarrow A=\frac{-15}{-5}$$

$$\Rightarrow \mathrm{II}-\mathrm{I}=\boxed{A=3}$$

$$A+B=4 \Rightarrow 3+B=4 \Rightarrow B=4-3 \Rightarrow \boxed{B=1}$$

$$C=4-A \Rightarrow C=4-3 \Rightarrow \boxed{C=1}$$

$$\frac{4x^2-3x+8}{x^3+2x+4}=\frac{A}{(x+2)}+\frac{Bx+C}{x^2-2x+2}$$

$$=\frac{(3)}{x+2}+\frac{(1)(x)+(1)}{x^2-2x+2}=\frac{3}{x+2}+\frac{x+1}{x^2-2x+2}$$

حل c) چون این کسر یک کسر واقعی نیست؛ بنا بر آن اول صورت را تقسیم مخرج نموده؛ سپس قسمت کسر واقعی آن را به کسور قسمی آن تجزیه مینماییم:

$$\frac{2x^2-8x^3+4+7x^2-3x+4}{x^2-9x+3}=(2x^2+10x+91)+\frac{783x-104}{x^2-9x+3}$$

بخش دوم:

$a)\ \frac{1}{x^4(x+1)}$ $\qquad b)\ \frac{3x^2-6x+2}{x^3-4x^2+5x-2}$ $\qquad c)\ \frac{x^4+1}{x^2(x-1)}$

$d)\ \frac{3x^2+5x+10}{x^3+2x^2-4x-8}$ $\qquad e)\ \frac{3x^2-18x+36}{x^3-6x^2+9x}$

حل a)

$$\frac{1}{x^4(x+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x^3}+\frac{D}{x^4}+\frac{E}{x+1}=\frac{Ax^3(x+1)+Bx^2(x+1)+Cx(x+1)+D(x+1)+Ex^4}{x^4(x+1)}$$

$$=\frac{Ax^4+Ax^3+Bx^3+Bx^2+Cx^2+Cx+Dx+D+Ex^4}{x^4(x+1)}$$

$$=\frac{(A+E)x^4+(A+B)x^3+(B+C)x^2+(C+D)x+D}{x^4(x+1)}$$

$$A+E=0 \Rightarrow -1+E=0 \Rightarrow \boxed{E=1}$$

$$A+B=0 \Rightarrow A+1=0 \Rightarrow \boxed{A=-1}$$

$$B+C=0 \Rightarrow B-1=0 \Rightarrow \boxed{B=1}$$

$$C+D=0 \Rightarrow C+1=0 \Rightarrow \boxed{C=-1}$$

$$D=1$$

$$\frac{1}{x^4(x+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x^3}+\frac{D}{x^4}+\frac{E}{x+1}$$

$$=\frac{-1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{-1}{x^3}+\frac{1}{x^4}+\frac{1}{x+1}=-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^4}+\frac{1}{x+1}$$

حل b)

$$\frac{3x^2-6x+2}{x^3-4x^2+5x-2}=\frac{3x^2-6x+2}{(x-1)(x-1)(x-2)}=\frac{A}{(x-1)}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{(x-2)}$$

$$=\frac{A(x-1)+B(x-2)+C(x-1)^2}{(x-1)^2(x+2)}$$

$$A(x-1)(x-2)+x-2)B+C(x-1)^2=3x^2-6x+1$$

$$x=-1 \Rightarrow -B=3-6+2 \Rightarrow -V=-1 \Rightarrow B=1$$

$$x=2 \Rightarrow C=12-12+2 \Rightarrow C=2$$

$$x=0 \Rightarrow 2A-2+2=2 \Rightarrow 2A=2 \Rightarrow A=1$$

$$\therefore \frac{3x^2-6x+2}{x^3-4x^2+5x-2}=\frac{1}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{2}{x-2}$$

حل c)چون این کسر یک کسر واقعی نیست؛ بنابر آن اول صورت را تقسیم مخرج نموده؛سپس قسمت واقعی این کسر را به کسور قسمی آن تجزیه مینمایم:

$$\frac{x^4+1}{x^2(x-1)}=\frac{x^4+1}{x^3-x^2}=(x+1)+\frac{x^2+1}{x^3-x^2}$$

$$\frac{x^2+1}{x^3-x^2}=\frac{x^2+1}{x^2(x-1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{(x-1)}$$

$$=\frac{Ax(x-1)+B(x-1)+Cx^2}{x^2(x-1)}=\frac{Ax^2-Ax+Bx-B+Cx^2}{x^3-x^2}$$

$$=\frac{(A+C)x^2+(-A+B)x-B}{x^3-x^2}$$

چون مخرج‌ها باهم مساوی اند؛ بنابر آن صورت‌ها نیز باهم مساوی اند:

$$x^2+1=(A+C)x^2+(-A+B)x-B$$

$$\begin{cases} A+C=1 \quad \Rightarrow C=1-A \quad \Rightarrow C=1-(-1)=1+1=2 \quad \Rightarrow \boxed{C=2} \\ -A+B=0 \quad \Rightarrow -A=-B \quad \Rightarrow A=B \quad \Rightarrow \boxed{A=-1} \\ -B=1 \quad \Rightarrow \boxed{B=-1} \end{cases}$$

$$\frac{x^2+1}{x^3-x^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{(x-1)}=\frac{-1}{x}+\frac{-1}{x^2}+\frac{2}{(x-1)}=-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x-1}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x^4+1}{x^3-x^2}=(x+1)-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x-1}$$

حل (d

$$\frac{3x^2+5x+10}{x^3+2x^2-4x-8}=\frac{3x^2+5x+10}{(x-2)(x+2)(x+2)}=\frac{A}{(x-2)}+\frac{B}{(x+2)}+\frac{C}{(x+2)^2}$$

$$=\frac{A(x+2)^2+B(x-2)(x+2)+C(x-2)}{(x-2)(x+2)^2}=\frac{A(x^2+4x+4)+B(x^2-4)+(x-2)}{(x-2)(x+2)^2}$$

$$=\frac{Ax^2+4Ax+4A+Bx^2-4B+Cx-2C}{(x-2)(x+2)^2}$$

$$=\frac{(A+B)x^2+(4A+C)x+(4A-4B-2C)}{(x-2)(x+2)^2}$$

$$3x^2+5x+10=(A+B)x^2+(4A+C)x+(4A-4B-2C)$$

$$\begin{cases} A+B=3 \quad \Rightarrow B=3-A \\ 4A+C=5 \quad \Rightarrow C=5-4A \\ 4A-4B-2C=10 \quad \Rightarrow 4A-4B-2(5-4A)=10 \quad \Rightarrow 4A-4B-10+8A=10 \quad \Rightarrow 12A-4B=20 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 12A-4B=20 \\ (A+B=3)\cdot(-4) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 12A-4B\ =20 \\ -4A-4B=-12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ 12A-4B\ =20 \\ \mp 4A \mp 4B=\mp 12 \end{cases}$$

$$16A=32 \quad \Rightarrow A=\frac{32}{16}=2 \quad \Rightarrow \boxed{A=2}$$

$$C=5-4A=5-4(2)=5-8=-3 \quad \Rightarrow \boxed{C=-3}$$

$$B=3-A=3-2=1 \quad \Rightarrow \boxed{B=1}$$

$$\frac{3x^2+5x+10}{x^3+2x^2-4x+8}=\frac{A}{(x-2)}+\frac{B}{(x+2)}+\frac{C}{(x+2)^2}$$

$$=\frac{2}{(x-2)}+\frac{1}{(x+2)}+\frac{-3}{(x+2)^2}=\frac{2}{x-2}+\frac{1}{x+2}-\frac{3}{(x+2)^2}$$

حل (e

$$\frac{3x^2-18x+36}{x^3-6x^2+9x}=\frac{3x^2-18x+36}{x(x^2-6x+9)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2-6x+9}$$

$$\frac{3x^2-18x+36}{x^3-6x^2+9x}=\frac{3x^2-18x+36}{x(x^2-6x+9)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2-6x+9}$$

$$=\frac{A(x^2-6x+9)+(Bx+C)(x)}{x(x^2-6x+9)}$$

$$=\frac{Ax^2-6Ax+9A+Bx^2+Cx}{x(x^2-6x+9)}$$

$$=\frac{(A+B)x^2+(-6A+C)x+9A}{x(x^2-6x+9)}$$

$$3x^2-18x+36=(A+B)x^2+(-6A+C)x+9A$$

$$\begin{cases} A+B=3 \\ -6A+C=-18 \\ 9A=36 \ \Rightarrow\ A=\frac{36}{9} \ \Rightarrow\ \boxed{A=4} \end{cases}$$

$$-6A+C=-18 \ \Rightarrow\ C=-18+6A$$

$$\Rightarrow\ C=-18+6\cdot(4) \ \Rightarrow\ C=-18+24 \ \Rightarrow\ \boxed{C=6}$$

$$A+B=3 \ \Rightarrow\ B=3-A \ \Rightarrow\ B=3-4 \ \Rightarrow\ \boxed{B=-1}$$

$$\frac{3x^2-18x+36}{x^3-6x^2+9x}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2-6x+9}$$

$$=\frac{4}{x}+\frac{(-1)x+6}{x^2-6x+9}=\frac{4}{x}+\frac{-x+6}{x^2-6x+9}$$

بخش سوم:

$a)\ \frac{3x+7}{(x^2+x+1)(x^2-4)}$, $b)\ \frac{x^2+3x+4}{x^4-2x^2+1}$

$c)\ \frac{x^2+13x+10}{x^3-5x^2}$, $d)\ \frac{x^5}{x^4-1}$

حل a)

$$\frac{3x+7}{(x^2+x+1)(x^2-4)}=\frac{3x+7}{(x^2+x+1)(x-2)(x+2)}=\frac{A}{(x-2)}+\frac{B}{(x+2)}+\frac{Cx+D}{(x^2+x+1)}$$

$$=\frac{A(x+2)(x^2+x+1)+B(x-2)(x^2+x+1)+(Cx+D)(x^2-4)}{(x^2+x+1)(x-2)(x+2)}$$

$$=\frac{A(x^3+x^2+x+2x^2+2)+B(x^3+x^2+x-2x^2-2x-2)+Cx^3-4Cx+Dx^2-4D}{(x^2+x+1)(x-2)(x+2)}$$

$$=\frac{A(x^3+3x^2+3x+2)+B(x^3-x^2-x-2)+Cx^3+Dx^2-4Cx-4D}{(x^2+x+1)(x-2)(x+2)}$$

$$=\frac{(A+B+C)(x^3)+(3A-B+D)(x^2)+(3A-B-4C)x+(2A-2B-4D)}{(x^2+x+1)(x-2)(x+2)}$$

$$\begin{cases}A+B+C=0\\3A-B+D=0\\3A-B-4C=3\\2A-2B-4D\end{cases}\qquad\begin{cases}A+B+C=0\ \ /-4\\3A-B-4C=3\end{cases}\qquad\begin{array}{r}-4A-4B-4C=0\\ \underline{\ \ 3A\mp\ B\mp4C=\ 3}\\ -7A-3B=-3\ \ldots\ \text{I}\end{array}$$

$$\begin{array}{l}3A-B+D=0\ /-4\\2A-2B-4D=7\end{array}\qquad\begin{array}{r}-12A+4B-4D=0\\ \underline{-2A\mp2B\mp4D=\ 7}\\ -14A+6B=-7\ \ldots\ \text{II}\end{array}$$

$$\begin{cases}-7A-3B=-3\ \ /-2\\-14A+6B=-7\end{cases}\qquad\begin{array}{r}14A+6B=6\\ \underline{\mp14A\pm6B=\mp7}\\ 28A\qquad=13\end{array}\ \Rightarrow\ \boxed{A=\frac{13}{28}}$$

$$-7A-3B=-3\ \Rightarrow\ -7\frac{13}{(28)}-3B=-3\ \Rightarrow\ \frac{-13}{4}-3B=-3\ \Rightarrow\ 3B=3-\frac{13}{4}$$

$$\Rightarrow\ 3B=-\frac{1}{4}\ \Rightarrow\ \boxed{B=-\frac{1}{12}}$$

$$\begin{array}{ll}A+B+C=0 & 3A-B+D=0\\ \frac{13}{28}-\frac{1}{12}+C=0 & 3(\frac{13}{28})-(\frac{-7}{84})+D=0\\ \frac{(3)(13)-7}{84}+C=0 & \frac{39}{28}+\frac{7}{84}+D=0\\ \frac{39-7}{84}+C=0 & \frac{117+7}{84}+D=0\\ \frac{32}{84}+C=0 & \frac{124}{84}+D=0\\ \boxed{C=-\frac{8}{21}} & \boxed{D=\frac{31}{21}}\end{array}$$

$$A=\frac{13}{28}\qquad B=-\frac{1}{12}\qquad C=-\frac{8}{21}\qquad D=\frac{31}{21}$$

$$\frac{3x+7}{(x^2+x+1)}=\frac{\frac{13}{28}}{(x-2)}+\frac{\frac{-1}{12}}{x+2}+\frac{\frac{-8}{21}+\frac{31}{21}}{x^2+x+1}$$

$$=\frac{13}{28(x-2)}-\frac{7}{84(x+2)}-\frac{32x+124}{84(x^2+x+1)}$$

حل (b

$$\frac{x^2+3x+4}{x^4-2x^2+1}=\frac{x^2+3x+4}{(x^2)^2-2x^2+1}=\frac{x^2+3x+4}{(x^2-1)^2}=\frac{Ax+B}{(x^2-1)}+\frac{Cx+D}{(x^2-1)^2}$$

$$=\frac{(Ax+B)(x^2-1)+(Cx+D)}{(x^2-1)^2}=\frac{Ax^3-Ax+Bx^2-B+Cx+D}{(x^2-1)^2}$$

$$=\frac{Ax^3+Bx^2+(-A+C)x+(-B+D)}{(x^2-1)^2}$$

$$x^2+3x+4=Ax^3+Bx^2+(-A+C)x+(-B+D)$$

$$\begin{cases}\boxed{A=0}\\ \boxed{B=1}\\ -A+C=3 \;\Rightarrow\; \boxed{C=3}\\ -B+D=4 \;\Rightarrow\; -1+D=4 \;\Rightarrow\; D=4+1 \;\Rightarrow\; \boxed{D=5}\end{cases}$$

$$\frac{x^2+3x+4}{x^4-2x^2+1}=\frac{Ax+B}{(x^2-1)}+\frac{Cx+D}{(x^2-1)^2}$$

$$=\frac{0.x+1}{x^2-1}+\frac{3x+5}{(x^2-1)^2}=\frac{1}{x^2-1}+\frac{3x+5}{(x^2-1)^2}$$

حل (c

$$\frac{x^2+13x+10}{x^3-5x^2}=\frac{x^2+13x+10}{x^2(x-5)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x-5}$$

$$=\frac{A(x)(x-5)+B(x-5)+C(x^2)}{x^2(x-5)}=\frac{Ax^2-5Ax+Bx-5B+Cx^2}{x^2(x-5)}$$

$$=\frac{(A+C)x^2+(-5A+B)x+(-5B)}{x^2(x-5)}$$

چون مخرج‌ها با هم مساوی است بنا بر این صورت‌ها نیز مساوی اند:

$$x^2+13x+10=(A+C)x^2+(-5A+B)x+(-5B)$$

$$\begin{cases}A+C=1\\ -5A+B=13\\ -5B=10 \;\Rightarrow\; B=\frac{10}{-5} \;\Rightarrow\; \boxed{B=-2}\end{cases}$$

$$-5A+B=13 \;\Rightarrow\; -5A-2=13 \;\Rightarrow\; -5A=13+2=15 \;\Rightarrow\; A=\frac{15}{-5} \;\Rightarrow\; \boxed{A=-3}$$

$$A+C=1 \;\Rightarrow\; -3+C=1 \;\Rightarrow\; C=1+3 \;\Rightarrow\; \boxed{C=4}$$

$$\frac{x^2+13x+10}{x^3-5x^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x-5}=\frac{-3}{x}+\frac{-2}{x^2}+\frac{4}{x-5}$$

حل d) چون این کسر یک کسر واقعی نیست؛ بنابر آن اول صورت را تقسیم مخرج نموده و بعداً قسمت کسر واقعی آن را به کسور قسمی تجزیه می‌نماییم:

$$\frac{x^5}{x^4-1}=x+\frac{x}{x^4-1}$$

$$\frac{x}{x^4-1}=\frac{x}{(x^2-1)(x^2+1)}=\frac{Ax+B}{(x^2-1)}+\frac{Cx+D}{(x^2+1)}=\frac{(Ax+B)(x^2+1)+(Cx+D)(x^2-1)}{(x^2-1)(x^2+1)}$$

$$=\frac{Ax^3+Ax+Bx^2+B+Cx^3-Cx+Dx^2-D}{(x-1)(x+1)}=\frac{(A+C)x^3+(B+D)x^2+(A-C)x+(B-D)}{(x^2-1)(x^2+1)}$$

چون مخرج‌ها باهم مساوی اند؛ بنابر این صورت‌ها نیز مساوی اند:

$$x=(A+C)x^3+(B+D)x^2+(A-C)x+(B-D)$$

$$\begin{cases}A+C=0\\ B+D=0\\ A-C=1\\ B-D=0\end{cases}\qquad \begin{array}{r}A+C=0\\ \pm A\mp C=\pm 1\\ \hline 2C=-1\\ \boxed{C=-\frac{1}{2}}\end{array}\qquad \begin{array}{r}B+D=0\\ \pm B\mp D=0\\ \hline 2D=0\\ \boxed{D=0}\end{array}$$

$$A+C=0$$

$$A=-C\quad \Rightarrow A=-(-\frac{1}{2})\Rightarrow \boxed{A=\frac{1}{2}}$$

$$B+D=0\ \Rightarrow\ B=-D\ \Rightarrow\ \boxed{B=0}$$

$$\frac{x}{x^4-1}=\frac{Ax+B}{(x^2-1)}+\frac{Cx+D}{(x^2+1)}=\frac{\frac{1}{2}x+0}{x^2-1}+\frac{-\frac{1}{2}x+0}{x^2+1}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}x}{x^2-1}+\frac{-\frac{1}{2}x}{x^2+1}=\frac{x}{2(x^2-1)}-\frac{x}{2(x^2+1)}$$

$$\Rightarrow\frac{x^5}{x^4-1}=x+\frac{x}{2(x^2-1)}-\frac{x}{2(x^2+1)}$$

$$\log_a b = x$$

$$a^x = b$$

فصل پنجم

عنوان درس: انتیگرال‌های توابع اکسپوننشیل

صفحهٔ کتاب (190-189)

وقت تدریس(یک ساعت درسی)

اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	• شاگردان مفهوم انتیگرال تابع اکسپوننشیل را بفهمند. • شاگردان سؤالها و مثال های مربوط به انتیگرال تابع اکسپوننشیل را حل کرده بتوانند. • شاگردان به حل سؤالها و مثال های مربوط به انتیگرال تابع اکسپوننشیل علاقه‌مند شده و احساس خوشی نمایند.
روش های تدریس	سؤال و جواب، کارهای گروهی و انفرادی
مواد ممد درسی	چارت بخش ورودی
توضیح ورودی (5) دقیقه	بعد از داخل شدن به صنف و انجام کارهای مقدماتی تدریس، به ارائهٔ درس جدید بپردازید. چارت شکل ورودی را در پیشروی صنف آویزان نموده و سؤال مربوطه آن را از شاگردان بپرسید؛ شاگردان را تشویق و رهنمایی نمایید تا جواب های درست را ارائه کنند در غیرآن میتوانید تشریحات لازم را قرار ذیل ارائه نمایید: این دو رابطه بین هم ارتباط معکوس دارند طوریکه تابع لوگاریتمی معکوس تابع اکسپوننشیل است.

فعالیت جریان درس: (28) دقیقه

شاگردان را به گروه‌های مناسب تقسیم نموده و به آنها وظیفه دهید تا فعالیت صفحهٔ (189)کتاب درسی را در گروه-های شان به مشورهٔ هم انجام دهند. در جریان کارگروهی از گروه ها نظارت به عمل آرید و همه شاگردان را تشویق نمایید که سهم فعال داشته باشند. در ختم فعالیت از نمایندهٔ یک گروه بخواهید تا فعالیت انجام شده گروهی خویش را روی تخته توضیح دهد و از گروه‌های متباقی بخواهید تا کار های گروهی خویش را با آن مقایسه نمایند، اگرکدام مشکل یا اشتباهی در کار گروهی شان موجود باشد به اصلاح آن بپردازند. حال نتیجهٔ این فعالیت را با سهم گیری فعال شاگردان روی تخته انجام و توضیح نمایید.

تحکیم درس: (7) دقیقه

برای تحکیم درس، مثال اول صفحهٔ(190)کتاب درسی را به شاگردان وظیفه دهید تا به شکل انفرادی در کتابچه‌های خویش حل نمایند و همزمان به آن از یک شاگرد داوطلب بخواهید تا مثال مذکور را روی تخته حل نماید. درختم کار انفرادی اگر حل روی تخته کاملاً درست بود از همهٔ شاگردان بخواهید تا حل خویش را با حل روی تخته مقایسه نمایند تا اگر اشتباهات در کار شان موجود باشد به اصلاح آن بپردازند.

(متوجه باشید که شاگردان در جریان کار انفرادی از حل مثال کتاب درسی استفاده ننمایند)

ارزیابی ختم درس: (5) دقیقه

برای اینکه مطمئن شوید آیا شاگردان این درس را خوب فرا گرفته اند یا خیر؟ میتوانید از یک شاگرد داوطلب بخواهید تا مثال دوم صفحهٔ(190) کتاب درسی را با سهم گیری فعال شاگردان روی تخته حل نماید.

جواب به سؤال های تمرین

انتگرل های توابع اکسپوننشیل ذیل را محاسبه کنید.

$a)\ \int 3^{x+1}dx \qquad b)\ \int 2^{-x}dx \qquad c)\ \int a^{x+b}dx$

$d)\ \int \frac{1}{a^x}dx \qquad e)\ \int 2^x\cdot 3^x dx \qquad f)\ \int \frac{2^x}{3^x}dx$

$g)\ \int \frac{4^{x+3}}{2^x}dx \qquad h)\ \int \frac{5^x+3^x}{2^x}dx \qquad i)\ \int (1+2^x)dx$

حل:

$$a)\ \int 3^{x+1}dx=\int 3^x\cdot 3dx=3\int 3^x dx=3\frac{3^x}{\ln 3}+C=\frac{3^{x+1}}{\ln 3}+C$$

$$b)\ \int 2^{-x}dx=\int 2^{-x}dx=\frac{-2^{-x}}{\ln 2}+C$$

$$c)\ \int a^{x+b}dx=\int a^x\cdot a^b dx=a^b\int a^x dx=a^b\ \frac{a^x}{\ln a}+C=\frac{a^{x+b}}{\ln a}+C$$

$$d)\ \int \frac{1}{a^x}dx=\int a^{-x}dx=\frac{a^{-x}}{\ln a}+C=\frac{1}{a^x\ln a}+C$$

$$e)\ \int 2^x\cdot 3^x dx=\int (2\cdot 3)^x dx=\int 6^x dx=\frac{6^x}{\ln 6}+C$$

$$f)\ \int \frac{2^x}{3^x}dx=\int (\frac{2}{3})^x dx=\frac{(\frac{2}{3})^x}{\ln\frac{2}{3}}+C$$

$$g)\int \frac{4^{x+3}}{2^x}\cdot dx=\int \frac{4^{x+3}}{2^x}\cdot dx=\int 4^3\cdot 2^x dx=4^3\int 2^x dx=4^3\ \frac{2^x}{\ln 2}+C=2^6(\frac{2^x}{\ln 2}+C)=\frac{2^{x+6}}{\ln 2}+C$$

$$h)\int \frac{5^x+3^x}{2^x}\cdot dx=\int ((\frac{5}{2})^x+(\frac{3}{2})^x)\cdot dx=\int (\frac{5}{2})^x dx+\int (\frac{3}{2})^x dx=\frac{(\frac{3}{2})^x}{\ln(\frac{3}{2})}+\frac{(\frac{5}{2})^x}{\ln(\frac{5}{2})}+C$$

$$i)\int (1+2)^x dx=\int 1\cdot dx+\int 2^x dx=\int dx+\int 2^x dx=x+C_1+\frac{2^x}{\ln 2}+C_2$$

$$\because\ C_1+C_2=C\ \ \Rightarrow\ x+\frac{2^x}{\ln 2}+C$$

$$y = a^x$$
$$\int a^x dx = ?$$

فصل پنجم

عنوان درس: انتیگرال‌های توابع لوگاریتمی

صفحهٔ کتاب (192-191)

وقت تدریس(دو ساعت درسی) ساعت اول درسی

اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	• شاگردان مفهوم انتیگرال‌های توابع لوگاریتمی را بفهمند. • شاگردان سؤالها و مثال های مربوط به انتیگرال‌های توابع لوگاریتمی را حل کرده بتوانند. • شاگردان به حل سؤالها و مثال های مربوط به انتیگرال‌های توابع لوگاریتمی علاقه‌مند شوند.
روش های تدریس	سؤال و جواب، کارهای گروهی و انفرادی
مواد ممد درسی	چارت بخش ورودی
توضیح ورودی (5) دقیقه	بعد از داخل شدن به صنف و انجام کارهای مقدماتی تدریس به ارائه درس جدید بپردازید وهم چارت شکل ورودی را در مقابل صنف آویزان نموده و سؤال مربوطه آن را از شاگردان بپرسید. آنها را طوری رهنمایی نمایید تا جواب های درست را ارائه نمایند در غیرآن میتوانید قرار ذیل تشریحات لازم را به آنها ارائه نمایید: تابع اکسپوننشیل $y = a^x$ در حالت که $a > 1$ باشد متزاید است؛ یعنی حالت صعودی را دارد. تابع اکسپوننشیل $y = a^x$ در حالت که $a < 1$ باشد متناقص است؛ یعنی حالت نزولی را دارد.

فعالیت جریان درس: (28) دقیقه

شاگردان را به گروه‌های مناسب تقسیم نموده و به آنها وظیفه دهید تا فعالیت صفحهٔ(191) کتاب درسی را در گروه‌های شان به مشورهٔ هم انجام دهند. در جریان فعالیت گروهی از گروه ها نظارت به عمل آرید و شاگردان را تشویق نمایید که همه در کارگروهی خویش سهم فعال داشته باشند. در ختم فعالیت از نمایندهٔ یک گروه‌ها بخواهید تا فعالیت انجام شدهٔ گروهی خویش را روی تخته توضیح نماید؛ اگر شاگردان گروه مذکور فعالیت را درست انجام داده بودند شاگردان از گروه های متباقی بخواهید تا کار های گروهی خویش را با آن مقایسه نمایند؛ اگر کدام مشکل یا اشتباهی در کار شان موجود باشد به اصلاح آن بپردازند.

سپس نتیجهٔ این فعالیت را با سهم گیری فعال شاگردان روی تخته توضیح نمایید.

تحکیم درس: (7) دقیقه

برای تحکیم درس به شاگردان وظیفه دهید تا مثال صفحهٔ(192)کتاب درسی را به شکل انفرادی در کتابچه‌های شان حل نموده و همزمان به آن از یک شاگرد داوطلب بخواهید تا مثال مذکور را روی تخته حل نماید. در ختم کار

انفرادی اگر حل روی تخته کاملاً درست بود از همهٔ شاگردان بخواهید تا حل خویش را با حل تخته مقایسه نمایند، اگر مشکل یا اشتباهی در کار شان موجود باشد به اصلاح آن بپردازند.
(متوجه باشید که شاگردان در جریان کار انفرادی از مثال حل شدهٔ کتاب درسی استفاده ننمایند)

ارزیابی ختم درس: (5) دقیقه

برای اینکه اطمینان حاصل نمایید آیا شاگردان این درس را خوب فرا گرفته اند یا خیر؟ از آنها قرار ذیل چند سؤال را بپرسید و جواب های قناعت بخش حاصل نمایید:

- انتیگرال تابع لوگاریتمی عبارت از چیست؟
- انتیگرال تابع لوگاریتم طبیعی عبارت از چیست؟

معلومات اضافی

خواص توابع اکسپوننشیل

هرگاه a یک عدد مثبت بوده و تابع $y = a^x$ باشد؛ پس:

1- تابع y متزاید است به شرطی که $a > 1$ باشد.

2- تابع y متناقص است به شرطی که $a < 1$ باشد.

3- تابع y ثابت است در صورتی که $a = 1$ باشد.

در هر حالت گراف تابع $y = a^x$ از انتروال باز $(0,1)$ میگذرد.

$$\int \ln x \cdot dx = \int 1 \cdot \ln x \cdot dx$$

$$\begin{cases} f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{x} \\ g'(x) = 1 \quad \Rightarrow g(x) = x \end{cases}$$

$$\int 1 \cdot \ln(x) \cdot dx = \int g'(x) \cdot f(x) \cdot dx$$

$$\int 1 \cdot \ln x \cdot dx = x \cdot \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} \cdot dx = x \cdot \ln x - \int 1 \cdot dx = x \cdot \ln x - x = x(\ln x - 1)$$

$$y = a^x$$
$$\int a^x dx = ?$$

فصل پنجم

عنوان درس: انتیگرال‌های توابع لوگاریتمی

صفحهٔ کتاب (194-192)

ساعت دوم درسی

اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	• شاگردان مفهوم انتیگرال‌های توابع لوگاریتمی و اکسپوننشیل را از طریق تعویض بفهمند. • شاگردان سؤالها و مثال های مربوط به انتیگرال‌های توابع لوگاریتمی و اکسپوننشیل را با استفاده از روش تعویضی حل کرده بتوانند. • شاگردان از حل سؤالها و مثال های مربوط به انتیگرال‌های توابع لوگاریتمی و اکسپوننشیل با استفاده از روش تعویضی علاقه‌مند شوند.
روش های تدریس	سؤال و جواب، کارهای گروهی و انفرادی
مواد ممد درسی	مواد مورد نیاز
توضیح ورودی (5) دقیقه	بعد از داخل شدن به صنف و انجام کارهای مقدماتی تدریس به ارائهٔ درس جدید بپردازید؛ طوریکه در این بخش اگر کدام موضوعی که باعث ایجاد انگیزه در شاگردان میشود به شکل سؤال از شاگردان بپرسید در غیر آن این درس به امتداد درس قبلی است؛ بنا بر این میتوانید بخش ورودی درس قبلی را در این جا به شکل مکرر توضیح نمایید.

فعالیت جریان درس: (28) دقیقه

شاگردان را به گروه‌های مناسب تقسیم نموده و به آنها وظیفه دهید تا مثال اول بخش اول یادداشت صفحهٔ(192)کتاب درسی را در گروه‌های خویش به مشورهٔ هم حل نمایند. در جریان کار گروهی از گروه ها نظارت به عمل آرید و همهٔ شاگردان را تشویق نمایید که در کار گروه سهم فعال داشته باشند. در ختم فعالیت از نمایندهٔ یک گروه بخواهید تا فعالیت انجام شدهٔ گروهی خویش را روی تخته توضیح نماید؛ اگر شاگردان گروه مذکور فعالیت را درست انجام داده بودند از شاگردان گروه های متباقی بخواهید تا کارهای گروهی خویش را با ان مقایسه نمایند اگرکدام مشکل یا اشتباهی در کار شان موجود باشد به اصلاح آن بپردازند. حال مثال دوم صفحهٔ(193)کتاب درسی را با سهم گیری فعال شاگردان روی تخته حل کرده توضیح نمایید، بعداً از یک شاگرد داوطلب بخواهید تا مثال سوم صفحهٔ (193) کتاب درسی را با سهم فعال شاگردان روی تخته حل کرده توضیح نمایید.

(متوجه باشید که شاگردان در جریان کارگروهی از مثال حل شدهٔ کتاب درسی استفاده ننمایند)

تحکیم درس: (7) دقیقه

برای تحکیم درس مثال اول مربوط به بخش دوم یادداشت صفحهٔ(193) کتاب درسی را به شاگردان وظیفه دهید تا به شکل انفرادی در کتابچه های شان حل نمایند؛ همزمان به آن از یک شاگرد داوطلب بخواهید تا مثال مذکور را روی تخته حل کند. در ختم کار انفرادی اگر حل مثال روی تخته کاملاً صحیح بود از همهٔ شاگردان بخواهید تا حل‌های خویش را با حل روی تخته مقایسه نمایند تا اگر اشتباهات در کار شان موجود باشد به اصلاح آن بپردازند.

(متوجه باشید که شاگردان در جریان کار انفرادی از مثال حل شدهٔ کتاب درسی استفاده ننمایند)

ارزیابی ختم درس: (5) دقیقه

برای اینکه مطمئن شوید شاگردان این درس را خوب فرا گرفته اند یا خیر؟ میتوانید از یک شاگرد داوطلب بخواهید تا مثال دوم صفحهٔ(194)کتاب درسی را با سهم گیری فعال شاگردان روی تخته حل نماید.

جواب به سؤال های تمرین

انتیگرال‌های زیر را حل کنید:

$a)\ \int \ln 2x^3 dx \qquad b)\ \int \ln\sqrt{x}dx \qquad c)\ \int \log\frac{x}{2}dx$

$d)\ \int 3\log\frac{1}{x}dx \qquad e)\ \int_1^2 \frac{4}{e^{2x-4}}dx$

حل:

$$a)\ \int \ln 2x^3 dx = \int(\ln 2 + \ln x^3)dx = \int(\ln 2 + 3\ln x)dx = \int \ln 2dx + \int 3\ln xdx = \ln 2\int dx + 3\int \ln xdx$$
$$= x\ln 2 + 3(x\ln x - x) = x\ln 2 + 3x\ln x - 3x = x(\ln 2 + 3\ln x - 3)$$

$$b)\ \int \ln\sqrt{x}dx = \int \ln x^{\frac{1}{2}}dx = \int \frac{1}{2}\ln xdx = \frac{1}{2}\int \ln xdx$$

$$\begin{cases} u = \ln x \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} du = \frac{1}{x}dx \\ v = x \end{matrix}$$

$$\Rightarrow\ \frac{1}{2}\int \ln xdx = \frac{1}{2}\int udv = \frac{1}{2}(u\cdot v - \int vdu) = \frac{1}{2}(x\ln x - \int x\frac{1}{x}dx) = \frac{1}{2}(x\ln x - x + C)$$

$$c)\ \int \log\frac{x}{2}dx = ? \qquad \begin{matrix} u = \log\frac{x}{2} & du = \frac{1}{x}\log edx \\ dx = dv & v = x \end{matrix}$$

$$\int \log\frac{x}{2}dx = x\log\frac{x}{2} - \int x\frac{1}{x}\log edx = x\log\frac{x}{2} - x\log e = x(\log\frac{x}{2} - \log e)$$

$d)\ \int 3\log\frac{1}{x}dx = ?$

$$\begin{cases} u = \log\frac{1}{x} & du = \frac{-1}{x}\log e dx \\ dv = dx & v = x \end{cases}$$

$$= 3\int \log\frac{1}{x}dx = 3(x\log\frac{1}{x} - \int x(-\frac{1}{x}\log e\, dx) = 3(x\log\frac{1}{x} + \int \log e dx) = 3x\log\frac{1}{x} + 3\log e\int dx$$

$$= 3x\log\frac{1}{x} + 3x\log e = 3x(\log\frac{1}{x} + \log e)$$

$e)\ \int_1^2 \frac{4}{e^{2x-4}}dx\ = \int_1^2 4e^{-(2x-4)}dx\ \ = 4\int_1^2 e^{4-2x}dx$

$$= 4\int_2^0 e^u(-\frac{1}{2}du) = -\frac{4}{2}\int_2^0 e^u du = -2(-1)\int_2^0 e^u du = 2e^u\ \Big|_0^2 = 2e^2 - 2e^0 = 2e - 2 \approx 12.788$$

$$\begin{cases} u = 4 - 2x \\ \frac{du}{dx} = -2 \quad \Rightarrow dx = -\frac{1}{2}du \end{cases}$$

$$u(1) = 4 - 2 = 2$$
$$u(2) = 4 - 4 = 0$$

$$\frac{5}{x^2-3x+2}=\frac{?}{(x-2)}+\frac{?}{(x-1)}$$

فصل پنجم

عنوان درس: محاسبهٔ انتیگرال توسط کسور قسمی

صفحهٔ کتاب(196-195)

وقت تدریس(یک ساعت درسی)

اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	• شاگردان مفهوم محاسبهٔ انتیگرال را توسط کسور قسمی بفهمند. • شاگردان سؤالها و مثال های مربوط به محاسبهٔ انتیگرال توسط کسور قسمی را حل کرده بتوانند. • شاگردان به حل سؤالها و مثال های مربوط به محاسبهٔ انتیگرال توسط کسور قسمی علاقه‌مند شوند.
روش های تدریس	سوال و جواب،کارهای گروهی و انفرادی
مواد ممد درسی	چارت بخش ورودی
توضیح ورودی (5) دقیقه	بعد از داخل شدن به صنف و انجام کارهای مقدماتی تدریس به ارائهٔ درس جدید بپردازید. چارت شکل ورودی را در مقابل صنف آویزان نموده و سؤال مربوطه آن را از شاگردان بپرسید. شاگردان را تشویق و رهنمایی نمایید تا جواب های درست را ارائه نمایند، در غیرآن میتوانید تشریحات لازم رابه کمک معلومات اضافی برای معلم مربوط این درس قرار ذیل به آنها ارائه کنید: نظر به تجزیهٔ یک کسر به کسور قسمی آن میتوان کسور قسمی این کسر را به دست آورد که عبارت اند از: $\frac{5}{x^2-3x+2}=\frac{5}{(x-2)}-\frac{5}{(x-1)}$

فعالیت جریان درس: (28) دقیقه

شاگردان را به گروه‌های مناسب تقسیم نموده و به آنها وظیفه دهید تا مثال اول صفحهٔ(195)کتاب درسی را در گروه‌های خویش به مشورهٔ هم حل نمایند. در جریان کار گروهی از گروه‌ها نظارت به عمل آرید و همهٔ شاگردان را تشویق نمایید که در کار گروهی شان سهم فعال داشته باشند. در ختم کار گروهی از نمایندهٔ یک گروه بخواهید تا کار گروهی خویش را روی تخته توضیح نماید؛ اگر شاگردان گروه مذکور فعالیت را درست انجام داده بودند از شاگردان گروه‌های متباقی بخواهید تا کار های گروهی خویش را با آن مقایسه نمایند، اگرکدام مشکل یا اشباهی در کار شان موجود باشد به اصلاح آن بپردازند.

(متوجه باشید که شاگردان در جریان کار گروهی از مثال حل شدهٔ کتاب درسی استفاده ننمایند.)

تحکیم درس: (7) دقیقه

برای تحکیم درس به شاگردان وظیفه دهید تا مثال دوم صفحهٔ(196)کتاب درسی را به شکل انفرادی در کتابچه های خویش حل نمایند و همزمان از یک شاگرد داوطلب بخواهید تا مثال مذکور را روی تخته حل کند. در ختم کار انفرادی اگر حل روی تخته کاملاً درست بود از همهٔ شاگردان بخواهید تا حل‌های خویش را با حل روی تخته مقایسه

نمایند، اگرمشکل یا اشتباهی در حل شان موجود باشد آنرا اصلاح نمایند.
(متوجه باشید که شاگردان در جریان کار انفرادی از حل شدهٔ کتاب درسی استفاده ننماید)

ارزیابی ختم درس: (5) دقیقه

برای اینکه مطمئن شوید آیا شاگردان این درس را خوب فرا گرفته اند یا خیر؟ از یک شاگرد داوطلب بخواهید تا یکی از سؤالهای تمرین صفحهٔ(196) کتاب را با سهم گیری فعال شاگردان روی تخته حل نمایید.

معلومات اضافی

حل سؤال بخش ورودی قرار ذیل است:

$$\frac{5}{x^2-3x+2}=\frac{A}{(x-2)}+\frac{B}{(x-1)}$$

$$=\frac{A(x-1)+B(x-2)}{(x-2)(x-1)}=\frac{Ax-A+Bx-2B}{(x-2)(x-1)}=\frac{(A+B)x+(-2B-A)}{(x-2)(x-1)}$$

چون مخرج‌ها باهم مساوی اند؛ بنابر این صورت‌ها نیز مساوی میباشد:

$$5=(A+B)x+(-2B-A)$$

$$\begin{cases}A+B=0 & \Rightarrow \\ -A-2B=5 & \Rightarrow\ -A=5+2B\ \Rightarrow\ A=-5-2B\end{cases}$$

$$A+B=0\ \Rightarrow\ (-5-2B)+B=0\ \Rightarrow\ -B=5\ \Rightarrow\ \boxed{B=-5}$$

$$A=-5-2B\ \Rightarrow\ A=-5-2(-5)\ \Rightarrow\ A=-5+10\ \Rightarrow\ \boxed{A=5}$$

$$\frac{5}{x^2-3x+2}=\frac{A}{(x-2)}+\frac{B}{(x-1)}=\frac{5}{(x-2)}-\frac{5}{(x-1)}$$

جواب به سؤال های تمرین

قیمت انتیگرال های زیر را توسط کسور قسمی به دست آرید:

$$a)\ \int\frac{x+2}{x^3-3x^2-x+3}dx \qquad b)\ \int\frac{x-2}{x^2-6x+5}dx \qquad c)\ \int\frac{x^6}{x^4+3x^2+2}dx$$

حل:

$$a)\ \int\frac{x+2}{x^3-3x^2-x+3}dx=\int\frac{x+2}{(x-1)(x+1)(x-3)}dx$$

$$\frac{x+2}{(x-1)(x+1)(x-3)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x-3}=\frac{A(x+1)(x-3)+B(x-1)(x-3)+C(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+1)(x-3)}$$

$$=\frac{A(x^2-3x+x-3)+B(x^2-3x-x+3)+C(x^2+x-x-1)}{(x-1)(x+1)(x-3)}$$

$$=\frac{A(x^2-2x-3)+B(x^2-4x+3)+C(x^2-1)}{(x-1)(x+1)(x-3)}$$

$$=\frac{Ax^2-2Ax-3A+Bx^2-4Bx+3B+Cx^2-C}{(x-1)(x+1)(x-3)}$$

$$=\frac{(A+B+C)x^2+(-2A-4B)x+(-3A+3B-C)}{(x-1)(x+1)(x-3)}$$

$$x+2=(A+B+C)x^2+(-2A-4B)x+(-3A+3B-C)$$

$$\begin{cases} A+B+C=0 \quad /(-1) \\ -2A-4B=1 \\ -3A+3B-C=2 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} -A-B-C=0 \\ \mp 3A \pm 3B \mp C = _2 \\ \hline 2A-4B=-2 \\ \mp 2A \mp 4B = _1 \\ \hline 4A=-3 \Rightarrow \boxed{A=-\frac{3}{4}} \end{array}$$

$$-2A-4B=1 \qquad A+B+C=0$$

$$-2(\frac{-3}{4})-4B=1 \qquad \frac{-3}{4}+\frac{1}{8}+C=0$$

$$\frac{3}{2}-4B=1 \qquad \frac{-6+1}{8}+C=0$$

$$-4B=1-\frac{3}{2} \qquad \frac{-5}{8}+C=0$$

$$-4B=\frac{2-3}{2} \qquad \boxed{C=\frac{5}{8}}$$

$$-4B=-\frac{1}{2} \qquad \boxed{B=\frac{1}{8}}$$

$$B=-\frac{1}{2}(-\frac{1}{4}) \qquad \boxed{A=-\frac{3}{4}}$$

$$\boxed{B=\frac{1}{8}}$$

$$\frac{x+2}{x^2-3x^2-x+3}=\frac{-\frac{3}{4}}{x-1}+\frac{\frac{1}{8}}{x+1}+\frac{\frac{5}{8}}{x-3}=\frac{1}{4}(\frac{-3}{x-1}+\frac{\frac{1}{2}}{x+1}+\frac{\frac{5}{2}}{x-3})=\frac{1}{4}(\frac{-3}{x-1}+\frac{1}{2(x+1)}+\frac{5}{2(x-3)}$$

و يا

$$=\frac{-3}{4(x-1)}+\frac{1}{8(x+1)}+\frac{5}{8(x-3)}$$

$$\int\frac{x+2}{x^3-3x^2-x+3}dx=\int[\frac{-3}{4(x-1)}+\frac{1}{8(x+1)}+\frac{5}{8(x-3)}]dx=\int\frac{-3}{4(x-1)}dx+\int\frac{1}{8(x+1)}dx+\int\frac{5}{8(x-3)}dx$$

$$=\frac{-3}{4}\int\frac{1}{x-1}dx+\frac{1}{8}\int\frac{1}{x+1}dx+\frac{5}{8}\int\frac{1}{x-3}dx$$

$$=\frac{-3}{4}\ln(x-1)+\frac{1}{8}\ln(x+1)+\frac{5}{8}\ln(x-3)+C$$

$b)\ \int\frac{x-2}{x^2-6x+5}dx$

حل:

$$\int\frac{x-2}{x^2-6x+5}dx=\int\frac{x-2}{(x-1)(x-5)}dx$$

$$\frac{x-2}{(x-1)(x-5)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-5}=\frac{A(x-5)+B(x-1)}{(x-1)(x-5)}$$

$$A(x-5)+B(x-1)=x-2$$

$$x=5 \quad : \qquad 4B=3 \quad \Rightarrow \quad \boxed{B=\frac{3}{4}}$$

$$x=1 \quad : \qquad -4A=-1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{A=\frac{1}{4}}$$

$$\int \frac{x-2}{x^2-6x+5}dx=\int (\frac{1}{4(x-1)}+\frac{3}{4(x-5)})dx=\frac{1}{4}\int \frac{1}{x-1}dx+\frac{3}{4}\int \frac{1}{x-5}dx$$

$$=\frac{1}{4}\ln(x-1)+\frac{3}{4}\ln(x-5)+C$$

نوت: در مخرج این سؤال در کتاب درسی، به عوض عدد 13 عدد پنج درست است.

حل:

$$c)\ \int \frac{x^6}{x^4+3x^2+2}dx=?$$

$$\frac{x^6}{x^4+3x^2+2}=x^2-3+\frac{7x^2+6}{x^4+3x^2+2}$$

$$\frac{7x^2+6}{x^4+3x^2+2}=\frac{7x^2+6}{(x^2+1)(x^2+2)}=\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{Cx+D}{x^2+2}=\frac{(Ax+B)(x^2+2)+(Cx+D)(x^2+1)}{x^4+3x^2+2}$$

$$=\frac{Ax^3+2Ax+Bx^2+2B+Cx^3+Cx+Dx^2+D}{x^4+3x^2+2}$$

$$=\frac{(A+C)x^3+(B+D)x^2+(2A+C)x+(2B+D)}{x^4+3x^2+2}$$

چون مخرج‌ها باهم مساوی اند؛ بنابر آن صورت‌هانیز باهم مساوی اند:

$$7x^2+6=(A+C)x^3+(B+D)x^2+(2A+C)x+(2B+D)$$

$$\begin{cases} A+C=0 \\ B+D=7 \\ 2A+C=0 \\ 2B+D=6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A+C=0 \\ 2A+C=0 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{array}{r} A+C=0 \\ -2A\pm C=0 \\ \hline -A=0 \end{array} \Rightarrow \boxed{A=0} \qquad \begin{array}{l} A+C=0 \\ \boxed{C=0} \end{array}$$

$$\begin{cases} B+D=7 \\ 2B+D=6 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{array}{r} B+D=\ \ 7 \\ -2B\pm D=\pm 6 \\ \hline -B=1 \end{array} \Rightarrow \boxed{B=-1} \qquad \begin{array}{l} B+D=7 \\ D=7-B \ \Rightarrow D=7-(-1) \ \Rightarrow D=8 \end{array}$$

$$A=0 \qquad B=-1 \qquad C=0 \qquad D=8$$

$$\frac{7x^2+6}{x^4+3x^2+2}=\frac{0\cdot x+(-1)}{x^2+1}+\frac{0\cdot x+8}{x^2+2}=\frac{-1}{x^2+1}+\frac{8}{x^2+2}=\frac{8}{x^2+2}-\frac{1}{x^2+1}$$

$$\frac{x^6}{x^4+3x^2+2}=x^2-3-\frac{1}{x^2+1}+\frac{8}{x^2+2}$$

$$\int \frac{x^6}{x^4+3x^2+2}dx=\int (x^2-3-\frac{1}{x^2+1}+\frac{8}{x^2+2})dx=\int x^2dx-\int 3dx-\int \frac{1}{x^2+1}dx+\int \frac{8}{x^2+2}dx$$

$$=\frac{x^3}{3}-3x-arc\tan x+8\int \frac{1}{(x^2+(\sqrt{2})^2}dx=\frac{x^3}{3}-3x-arc\tan x+\frac{8}{\sqrt{2}}arc\tan\frac{x}{\sqrt{2}}+C$$

فصل پنجم

عنوان درس: نکات مهم فصل پنجم

صفحهٔ کتاب (197)

وقت تدریس(یک ساعت درسی)

اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	• شاگردان مفاهیم نکات مهم فصل پنجم رابفهمند. • شاگردان مفاهیم نکات مهم فصل پنجم را تحلیل و تجزیه نموده و سؤالها مربوط به آن را حل کرده بتوانند. • شاگردان به حل سؤالها مربوط به نکات مهم فصل پنجم علاقه‌مند شوند.
روش های تدریس	سؤال و جواب، کارهای گروهی و انفرادی
مواد ممد درسی	چارتی که تمام نکات مهم فصل پنجم در آن تحریر شده باشد.
توضیح ورودی (5) دقیقه	بعد از داخل شدن به صنف و انجام کارهای مقدماتی تدریس که به ارائهٔ درس جدید بپردازید. چارتی را که از قبل تهیه نموده اید در مقابل صنف آویزان کرده و توجه شاگردان را به نکات آن جلب نموده و اهمیت نکات مهم فصل پنجم را به آنها بیان نمایید تا شاگردان متوجه اهمیت آنها شده و علاقه به یادگیری بهتر آنها را از خود نشان دهند و این نکات مهم را خوب فرا گیرند.

فعالیت جریان درس: (28) دقیقه

به نوبت از شاگردان بخواهید تا هر کدام یک یک نکتهٔ مهم این فصل را از روی چارت بخوانند و توضیح دهند. این کار را تا زمانی ادامه دهید که تمام نکات مهم فصل پنجم توسط شاگردان با استفاده ازچارت توضیح گردد. احیاناً اگر در توضیح شاگردان کدام اشتباهی موجود بود آنرا روی چارت نشانی نمایید تا بعداً توسط شما به اصلاح آن پرداخته شود.

تحکیم درس: (7) دقیقه

برای اینکه شاگردان به مهم بودن هر یک از این نکات پی ببرند نکات مهم که شاگردان هنگام توضیح آن مشکل داشتند خود شما آنرا طوری واضح سازید تا همه مشکلات آنها حل گردد.

ارزیابی ختم درس: (5) دقیقه

برای اینکه مطمئن شوید آیا شاگردان به اهمیت این نکات پی برده اند یا خیر؟ از شاگردان سؤال‌های ذیل را بپرسید:

- میان تابع اکسپوننشیل و لوگاریتمی چی رابطهٔ موجود است؟
- مشتق تابع اکسپوننشیل عبارت از چیست؟
- مشتق تابع لوگاریتمی عبارت از چیست؟
- انتیگرال تابع اکسپوننشیل عبارت از چیست؟
- انتیگرال تابع لوگاریتمی عبارت از چیست؟

تمرینات عمومی فصل پنجم

1- مشتق تابع $f(x)=\ln(\frac{x-2}{x+2})$ را پیدا کنید.

حل:

$$f(x)=\ln(\frac{x-2}{x+2}) \Rightarrow f(x)=\ln(x-2)-\ln(x+2) \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}$$

$$f'(x)=\frac{(x+2)-(x-2)}{(x-2)(x+2)} \Rightarrow f'(x)=\frac{x+2-x+2}{(x-2)(x+2)}$$

$$f'(x)=\frac{4}{x^2-4}$$

و یا:

$$f(x)=\ln(\frac{x-2}{x+2}) \Rightarrow g(x)=\frac{x-2}{x+2} \Rightarrow f(x)=\ln g(x) \Rightarrow f'(x)=\frac{g'(x)}{g(x)}$$

$$g'(x)=\frac{(x-2)'(x+2)-(x-2)(x+2)'}{(x+2)^2} \Rightarrow g'(x)=\frac{(x+2)-(x-2)}{(x+2)^2} \Rightarrow g'(x)=\frac{x+2-x+2}{(x+2)^2}$$

$$g'(x)=\frac{4}{(x+2)^2} \Rightarrow f'(x)=\frac{g'(x)}{g(x)}=\frac{\frac{4}{(x+2)^2}}{\frac{(x-2)}{(x+2)}}=\frac{4}{(x+2)^2}\cdot\frac{(x+2)}{(x-2)}=\frac{4}{(x+2)(x-2)}=\frac{4}{x^2-4}$$

2-مشتق تابع $f(x)=\ln\sqrt{x-1}$ را دریابید؟

حل:

$$f(x)=\ln\sqrt{x-1} \Rightarrow f(x)=\ln(x-1)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\ln(x-1)$$

$$f'(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-1}=\frac{1}{2x-2}$$

و یا:

$$g(x)=\sqrt{x-1}=(x-1)^{\frac{1}{2}}$$

$$g'(x)=\frac{1}{2}(x-1)^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{x-1}}$$

$$f'(x)=\frac{g'(x)}{g(x)} \Rightarrow f'(x)=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x-1}}}{\sqrt{x-1}}=\frac{1}{2(x-1)}$$

3- مشتق تابع $y=(2x)^{2x}$ را دریابید.

حل:

$$y=(2x)^{2x} \quad \Rightarrow \quad \ln y=\ln(2x)^{2x}=2x\cdot\ln 2x$$

$$(\ln y)'=(2x\cdot\ln 2x)'$$

$$\frac{y'}{y}=(2x)'\cdot\ln 2x+2x\cdot(\ln 2x)'$$

$$y'=(2\cdot\ln 2x+2x\cdot\frac{2}{2x})y \;\Rightarrow\; y'=(2\cdot\ln 2x+2)\cdot(2x)^{2x} \;\Rightarrow\; y'=2(2x)^{2x}(\ln 2x+1)$$

4- مشتق تابع $f(x)=\log\sqrt{x^3}$ را دریابید.

حل:

$$f(x)=\log\sqrt{x^3}=\log x^{\frac{3}{2}}=\frac{3}{2}\log x$$

$$f'(x)=(\frac{3}{2}\log x)'=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x}\log e=\frac{3}{2}x\log e$$

5- کسور قسمی زیر را به اجزای آن تجزیه کنید:

1) $\frac{x+1}{x^2-x-6}$ 2) $\frac{x^2-x+1}{x^3+2x^2+x}$ 3) $\frac{2x^2+3}{(x^2+1)^2}$

حل جز اول سؤال پنجم

$$1)\quad \frac{x+1}{x^2-x-6}=\frac{x+1}{(x+2)(x-3)}=\frac{A}{(x+2)}+\frac{B}{(x-3)}$$

$$=\frac{A(x-3)+B(x+2)}{(x+2)(x-3)}=\frac{Ax-3A+Bx+2B}{(x+2)(x-3)}$$

$$=\frac{(A+B)x+(-3A+2B)}{(x+2)(x-3)}$$

$$\begin{cases} A+B=1 \quad \Rightarrow \quad A=1-B \quad \Rightarrow A=1-\frac{4}{5} \;\Rightarrow A=\frac{5-4}{5}=\frac{1}{5} \;\Rightarrow \boxed{A=\frac{1}{5}} \\ -3A+2B=1 \;\Rightarrow -3(1-B)+2B=1 \;\Rightarrow -3+3B+2B=1 \;\Rightarrow 5B=1+3 \;\Rightarrow \boxed{B=\frac{4}{5}} \end{cases}$$

$$\frac{x+1}{x^2-x-6}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-3}=\frac{\frac{1}{5}}{x+2}+\frac{\frac{4}{5}}{x-3}=\frac{1}{5(x+2)}+\frac{4}{5(x-3)}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{x+1}{x-x-6}=\frac{1}{5(x+2)}+\frac{4}{5(x-3)}}$$

حل جز دوم سؤال پنجم

$$2)\ \frac{x^2-x+1}{x^3+2x^2+x}=\frac{x^2-x+1}{x(x^2+2x+1)}=\frac{x^2-x+1}{x(x+1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{(x+1)}+\frac{C}{(x+1)^2}$$

$$=\frac{A(x+1)^2+Bx(x+1)+Cx}{x(x+1)^2}=\frac{Ax^2+2Ax+A+Bx^2+Bx+Cx}{x(x+1)^2}$$

$$=\frac{(A+B)x^2+(2A+B+C)x+A}{x(x+1)^2}$$

$$\begin{cases}A+B=1\\2A+B+C=-1\\A=1\end{cases}\qquad \begin{aligned}A+B&=1\\1+B&=1\\B&=1-1\\ \boxed{B=0}\end{aligned}\qquad \begin{aligned}2A+B+C&=-1\\2(1)+0+C&=-1\\2+C&=-1\\C&=-1-2\\ \boxed{C=-3}\end{aligned}$$

$A=1 \qquad B=0 \qquad C=-3$

$$\frac{x^2-x+1}{x^3+2x^2+x}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{(x+1)^2}=\frac{1}{x}+\frac{0}{x+1}+\frac{-3}{(x+1)^2}=\frac{1}{x}-\frac{3}{(x+1)^2}$$

حل جز سوم سؤال پنجم

$$3)\ \frac{2x^2+3}{(x^2+1)^2}=\frac{Ax+B}{(x^2+1)}+\frac{Cx+D}{(x^2+1)^2}=\frac{(Ax+B)(x^2+1)+Cx+D}{(x^2+1)^2}$$

$$=\frac{Ax^3+Bx^2+Ax+Cx+B+D}{(x^2+1)^2}=\frac{Ax^3+Bx^2+(A+C)x+(B+D)}{(x^2+1)^2}$$

$$\begin{cases}A=0\\B=2\\A+C=0\ \Rightarrow\ C=-A=0\quad\Rightarrow\ C=0\\B+D=3\ \Rightarrow\ D=3-B=3-2=1\ \Rightarrow\ D=1\end{cases}$$

$A=0 \qquad B=2 \qquad C=0 \qquad D=1$

$$\frac{2x^2+3}{(x^2+1)^2}=\frac{0(x)+2}{(x^2+1)}+\frac{0(x)+1}{(x^2+1)^2}=\frac{2}{x^2+1}+\frac{1}{(x^2+1)^2}$$

6-انتیگرال های زیر را دریابید:

1) $\int 5t^7\,dt$ 2) $\int \frac{x^3-3}{x^2}dx$ 3) $\int (2\cos x-5\sin x+e^x)dx$

4) $\int \sqrt{\cos x}\sin x dx$ 5) $\int xe^{-x}dx$ 6) $\int\frac{5}{(2x+1)(x-2)}dx$

7) $\int_{-1}^{1}3x^2\sqrt{x^3+1}\ dx$

حل جزاول سؤال ششم

$$1)\ \int 5t^7 \cdot dt = 5\int t^7 \cdot dx = 5\left(\frac{t^{7+1}}{7+1} + C_1\right) = 5\left(\frac{t^8}{8} + C_1\right) \qquad \because\ 5C_1 = C$$

$$\int 5t^7 \cdot dt = 5 \cdot \frac{t^8}{8} + C = \frac{5}{8}t^8 + C$$

حل جز دوم سؤال ششم

$$2)\int \frac{x^3-3}{x^2} \cdot dx = \int \left(\frac{x^3}{x^2} - \frac{3}{x^2}\right) \cdot dx = \int \left(x - 3 \cdot \frac{1}{x^2}\right) \cdot dx = \int x \cdot dx - 3\int \frac{1}{x^2} \cdot dx$$

$$= \int x \cdot dx - 3\int x^{-2} \cdot dx = \frac{x^2}{2} + C_1 - 3\left(\frac{x^{-1}}{-1} + C_2\right) = \frac{1}{2}x^2 + C_1 + 3 \cdot \frac{1}{x} + 3C_2$$

$$\because\ C_1 + 3C_2 = C \qquad \Rightarrow \qquad \int \frac{x^3-3}{x^2} \cdot dx = \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{x} + C$$

حل جز سوم سؤال ششم

$$3)\ \int (2\cos x - 5\sin x + e^x) \cdot dx = \int 2\cos x \cdot dx - \int 5\sin x \cdot dx + \int e^x dx$$

$$= 2\int \cos x \cdot dx - 5\int \sin x \cdot dx + \int e^x dx$$

$$= 2\sin x + C_1 - 5(-\cos x + C_2) + e^x + C_3$$

$$= 2\sin x + 2C_1 + 5\cos x - 5C_2 + e^x + C_3$$

$$\because 2C_1 - 5C_2 + C_3 = C \quad \Rightarrow \int (2\cos x - 5\sin x + e^x) \cdot dx = 2\sin x + 5\cos x + e^x + C$$

حل جز چهارم سؤال ششم

$$4)\ \int \sqrt{\cos x} \cdot \sin x \cdot dx = ?$$

$$\begin{cases} u = \cos x \\ du = -\sin x \cdot dx \end{cases}$$

$$\int \sqrt{\cos x} \cdot \sin x \cdot dx = -\int \sqrt{\cos x}(-\sin x \cdot dx) = -\int \sqrt{u} \cdot du = -\int u^{\frac{1}{2}} \cdot du = -\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = -\frac{2u^{\frac{3}{2}}}{3} + C$$

$$= -\frac{2(\cos x)^{\frac{3}{2}}}{3} + C = -\frac{2\sqrt{(\cos x)^3}}{3} + C \quad \Rightarrow \int \sqrt{\cos x} \cdot \sin x dx = -\frac{2}{3}\sqrt{(\cos x)^3} + C$$

حل جز پنجم سؤال ششم

$$5)\ \int x \cdot e^{-x} \cdot dx = ?$$

$$\begin{cases} u = x \quad \Rightarrow \quad du = dx \\ dv = e^{-x}dx \quad \Rightarrow \quad v = -e^{-x} \end{cases}$$

$$\int x \cdot e^{-x} dx = \int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du = x(-e^{-x}) - \int -e^{-x} dx = -xe^{-x} + \int e^{-x} dx$$

$$= -xe^{-x} - e^{-x} + C = -e^{-x}(x+1) + C$$

$$\Rightarrow \int xe^{-x} dx = -e^{-x}(x+1) + C$$

حل جز ششم سؤال ششم

$$\int \frac{5}{(2x+1)(x-2)} \cdot dx = ?$$

$$\frac{5}{(2x+1)(x-2)} = \frac{A}{(2x+1)} + \frac{B}{(x-2)} = \frac{A(x-2)+B(2x+1)}{(2x+1)(x-2)}$$

$$= \frac{Ax-2A+2Bx+B}{(2x+1)(x-2)} = \frac{(A+2B)x+(-2A+B)}{(2x+1)(x-2)}$$

$$5 = (A+2B)x + (-2A+B)$$

$$\begin{cases} A+2B=0 \quad \Rightarrow A=-2B \;\Rightarrow\; A=-2(1) \;\Rightarrow\; A=-2 \\ -2A+B=5 \;\Rightarrow\; -2(-2B)+B=5 \;\Rightarrow\; 5B=5 \;\Rightarrow\; B=\frac{5}{5} \Rightarrow\; B=1 \end{cases}$$

$$\frac{5}{(2x+1)(x-2)} = \frac{A}{(2x+1)} + \frac{B}{(x-2)} = \frac{-2}{(2x+1)} + \frac{1}{x-2} \Rightarrow \quad \int (\frac{-2}{2x+1} + \frac{1}{x-2})dx = \int \frac{-2}{2x+1}dx + \int \frac{1}{x-2}dx$$

$$\begin{cases} u = 2x+1 \\ \frac{du}{dx} = 2 \\ du = 2dx \end{cases}$$

$$\begin{cases} v = x-2 \\ \frac{dv}{dx} = 1 \\ dv = dx \end{cases}$$

$$= -\int \frac{2dx}{2x+1} + \int \frac{dx}{x-2}dx = -\int \frac{1}{u}du + \int \frac{1}{v}dv$$

$$= -\int \frac{du}{u} + \int \frac{dv}{v} - \ln u + \ln v + C = -\ln|2x+1| + \ln|x-2| + C = \ln|x-2| - \ln|2x+1| + C = \ln\left|\frac{x-2}{2x+1}\right| + C$$

حل جز هفتم سؤال ششم

$$7) \int_{-1}^{1} 3x^2\sqrt{x^3+1}dx$$

$$\begin{cases} t = (x^3+1) \\ \frac{dt}{dx} = 3x^2 \quad \Rightarrow \; dt = 3x^2dx \end{cases}$$

$$\begin{cases} t(-1) = 0 \\ t(1) = 2 \end{cases}$$

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{x^3+1}\; 3x^2dx = \int_0^2 \sqrt{t}dt = \int_0^2 t^{\frac{1}{2}}dt = \frac{t^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} \Big|_0^2 = \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \Big|_0^2 = \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} \Big|_0^2 = \frac{2}{3}(2^{\frac{3}{2}} - 0^{\frac{3}{2}}) = \frac{2}{3}\sqrt{2^3}$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{8} = \frac{2}{3}\sqrt{2\cdot 4} = \frac{2\cdot 2}{3}\sqrt{2} = \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

7 – مشتق توابع زیر را دریابید:

$a)\ y=\ln(x^2+x+1)$

$b)\ y=\ln(\sin x)$

$c)\ y=e^{x^2+1}$

$d)\ y=\sqrt[x]{2}$

حل:

$$a)\ u=x^2+x+1$$

$$u'=2x+1$$

$$y=\ln u \Rightarrow y'=\frac{u'}{u} \Rightarrow \boxed{y'=\frac{2x+1}{x^2+x+1}}$$

حل:

$$b)\ u=\sin x \qquad y'=\frac{u'}{u}$$

$$u'=\cos x \qquad y'=\frac{\cos x}{\sin x}$$

حل:

$$c)\ y=e^{x^2+1}=e^{x^2}\cdot e^1 \Rightarrow \ln y=\ln(e^{x^2}\cdot e)$$

$$\ln y=\ln e^{x^2}+\ln e=x^2\ln e+1=x^2+1$$

$$\frac{y'}{y}=(x^2+1)' \Rightarrow y'=2x\cdot y \Rightarrow \boxed{y'=2x\cdot e^{x^2+1}}$$

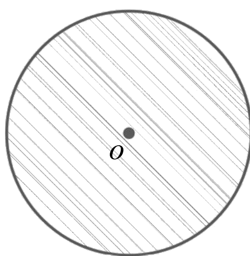
حل:

$$d)\ y=\sqrt[x]{2} \Rightarrow y=2^{\frac{1}{x}} \qquad \ln y=\ln 2^{\frac{1}{x}}$$

$$\ln y=\frac{1}{x}\ln 2 \Rightarrow (\ln y)'=(\frac{1}{x}\ln 2)' \Rightarrow \frac{y'}{y}=\ln 2(-\frac{1}{x^2})$$

$$y'=(\frac{-\ln 2}{x^2})y=-\frac{\ln 2}{x^2}\cdot\sqrt[x]{2}$$

فصل ششم



عنوان: محاسبه مساحت سطح محصور شده توسط یک منحنی

صفحه کتاب: (201– 202)

وقت تدریس: (2 ساعت درسی) ساعت اول درسی

اهداف آموزشی **- دانشی** **- مهارتی** **- ذهنیتی**	- شاگردان مفهوم مساحت سطح محصور شده توسط یک منحنی را بدانند. - شاگردان سطح محصور شده را که توسط یک منحنی و محور به وجود می آید رسم کرده بتوانند. - شاگردان به حل سؤال‌ها و مثال‌های مساحت محصور شده توسط یک منحنی علاقه‌مند شوند آنرا در زنده گی روزمرهٔ خویش به کار بگیرند.
روش های تدریس	سؤال وجواب ، کار گروهی و کار انفرادی
مواد ممد درسی	بکس هندسی، چارت شکل ورودی
توضیح ورودی **(5) دقیقه**	بعد از انجام کار های مقدماتی تدریس که بعد از داخل شدن به صنف برای هر معلم ضروری است به ارائه درس جدید بپردازید؛ ابتدا شکل ورودی را توضیح نمایید برای این کار چارت شکل ورودی را که از قبل آماده نموده اید پیش روی صنف آویزان و از شاگردان بپرسید: • در شکل ورودی چی می بینید؟ اگر شاگردان جواب های قناعت بخش ارائه کردند آنها را تشویق کنید در غیر آن شما شکل ورودی را چنین توضیح نمایید. در شکل ورودی یک سطح دایروی با مرکز O مشاهده می گردد و برای محاسبه مساحت سطح این دایره مذکور از فارمول πr^2 استفاده می گردد.

فعالیت جریان درس (28)دقیقه

شاگردان را به گروه های مناسب تقسیم و به آنها وظیفه دهید تا فعالیت صفحهٔ(201) کتاب درسی را با مشورهٔ یکدیگر انجام دهند.

در وقت اجرای فعالیت از تمام گروه ها مواظبت نمایید تا همهٔ شاگردان در انجام فعالیت سهیم باشند و نقطه بحرانی، نقاط تقاطع و انتیگرال مساحت مورد نظر را دریافت کرده بتوانند و اگر به مشکلی روبرو می شوند آنها را رهنمایی کنید.

در اخیر فعالیت از نمایندهٔ یک یا دو گروه بخواهید تا به مقابل صنف آمده، فعالیت انجام شده‌یی گروهی خود را به دیگران توضیح کنند. اگر در کار آنها اشتباهی وجود داشت آنرا شما اصلاح نمایید.

در ختم کار گروهی نتایجی که از انجام فعالیت به دست می آید هر یک را روی تخته نوشته و توضیح کنید تا برای شاگردان تفهیم گردد.

اکنون مثال 1 صفحهٔ(202) کتاب را روی تخته بنویسید و از یک شاگرد بخواهید تا مثال را روی تخته حل نموده و گراف آنرا ترسیم کند در عین زمان از سایر شاگردان بخواهید تا مثال مذکور را به شکل انفرادی در کتابچه های شان حل نمایند.

اگر در حل مثال روی تخته مشکلی وجود داشت از یک شاگرد داوطلب بخواهید تا آنرا اصلاح کند؛ اگر بازهم اشتباه موجود بود، خود شما آنرا اصلاح و از شاگردان بخواهید تا حل‌های خود را با مثال حل شدهٔ روی تخته مقایسه نمایند. این کار به شاگردانی که اشتباه نمودند کمک می کند تا متوجه شده و آنرا اصلاح کنند.

تحکیم درس (7) دقیقه

به منظور اینکه شاگردان درس جدید را بهتر فهمیده باشند، مثال 2 صفحهٔ(202) کتاب درسی را به روی تخته بنویسید، نقطهٔ بحرانی، نقاط با محورهای x و y تقاطع را تعیین کرده بعد گراف آنرا ترسیم نمایید. حال با استفاده از گراف، انتیگرال مورد نظر را حساب کنید؛ طوریکه شاگردان در حل مثال سهم فعال داشته باشند.

ارزیابی ختم درس (5) دقیقه

برای اینکه اطمینان حاصل نمایید آیا شاگردان به مفهوم درس امروز پی برده اند یا خیر؟ طور مختصر شاگردان را ارزیابی کنید؛ مثلاً بپرسید:

- سطح محصور شده یعنی چه؟
- چطور نقطهٔ بحرانی و نقاط تقاطع یک تابع با محورها را به دست می آوریم؟
- گراف تابع $y = f(x)$ در کدام حالت بالا و در کدام حالت پایین محور x قرار می گیرد؟

معلومات اضافی

اگر گراف تابع f نظر به محور x متناظر و در انتروال $[-a,a]$ انتیگرال پذیر باشد داریم که:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

ثبوت: اگر گراف تابع f نظر به محور x متناظر باشد $f(-x) = f(x)$ است ؛ پس:

$$\int_{-a}^{a} f(-x)\,dx = \int_{-a}^{a} f(x)\,dx$$

نظر به خاصیت ششم انتیگرال معین داریم که:

$$\int_{-a}^{a} f(-x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(-x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx..........I$$

بعد از تعویض داریم که:

$$-x = t \quad , \quad x = -t \quad ; \quad dx = -dt$$
$$x = -a \quad , \quad t = a \quad ; \quad x = 0 : \ t = 0$$

اینکه قیمت $\int_{-a}^{0} f(-x)\,dx$ را دریافته و در رابطه I وضع می کنیم:

$$\int_{-a}^{0} f(-x)\,dx = \int_{a}^{0} f(t)(-dt) = -\int_{a}^{0} f(t)\,dt = \int_{0}^{a} f(t)\,dt$$

$$\int_{-a}^{a} f(-x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(-x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx ...I$$

$$\int_{-a}^{a} f(-x)\,dx = \int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} f(t)\,dt + \int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

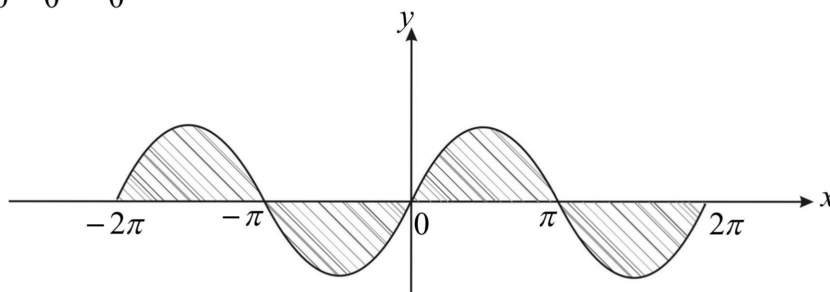
نظر به رابطه $f(-x) = f(x)$ داریم: $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$

جواب به سؤال های تمرین

1- مساحت سطح محصور شده توسط منحنی تابع $y = \sin x$ و محور x را در انتروال $[-2\pi\ ,\ 2\pi]$ حساب کنید.

حل: ابتدا تابع $y = \sin x$ را بین انتروال $[-2\pi , 2\pi]$ قیمت داده و گراف آنرا طور زیر ترسیم می نماییم:

x	-2π	$-\pi$	0	π	2π
$y = \sin x$	0	0	0	0	0

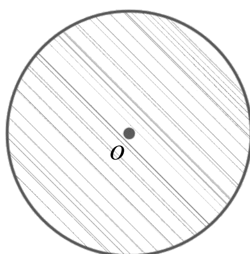


با استفاده از شکل کافی است که مساحت بین منحنی و محور x را انتروال $[0,\pi]$ به دست آورده و آنرا چهار چند کنیم تا مساحت کل حاصل گردد:

$$A = \int_{-2\pi}^{2\pi} \sin x dx = 4\int_{0}^{\pi} \sin x dx = 4[-\cos x]_0^{\pi} = 4[-\cos\pi + \cos 0] = 4[-\cos 180^\circ + 1]$$

$$= 4[-(-1)+1] = 4[1+1] = 4(2) = 8$$

فصل ششم



عنوان: محاسبه مساحت سطح محصور شده توسط یک منحنی

صفحۀ کتاب:(203– 205)

وقت تدریس: ساعت دوم درسی

اهداف آموزشی **- دانشی** **- مهارتی** **- ذهنیتی**	- شاگردان مفهوم مساحت سطح محصور شده توسط یک منحنی را بدانند. - شاگردان گراف تابع داده شده را ترسیم کرده بتوانند. - شاگردان به حل مثال‌های مساحت سطح محصور شده توسط یک منحنی علاقه‌مند شوند.
روش های تدریس	سؤال وجواب، کار انفرادی
مواد ممد درسی	بکس هندسی، چارت شکل ورودی
توضیح ورودی **(5) دقیقه**	نخست کار های مقدماتی تدریس که بعد از داخل شدن به صنف ضروری است انجام دهید. بعد به ارائۀ درس جدید بپردازید؛ چارت شکل ورودی درس قبلی را یکبار دیگر پیش روی صنف آویزان کنید و مانند ساعت قبلی آن را توضیح نمایید.

فعالیت جریان درس (20)دقیقه

مثال 3 صفحۀ(203) کتاب درسی را روی تخته بنویسید و مساحت آنرا با استفاده از گراف و سهم فعال شاگردان محاسبه کنید.

اکنون برای اجرای کار انفرادی مثال 4 صفحۀ(204) کتاب درسی را روی تخته بنویسید و از شاگردان بخواهید تا مثال را در کتابچه های شان حل کنند. همزمان از یک شاگرد دیگر بخواهید تا این کار را به روی تخته انجام دهد. اگر در حل مثال کدام اشتباهی موجود باشد از یک شاگرد داوطلب دیگر بخواهید تا آنرا اصلاح کند. وقتی کاملاً مطمئن شدید که حل مثال روی تخته درست است از سایر شاگردان بخواهید تا حل‌های شان را با حل روی تخته مقایسه و اگر اشتباهی وجود داشت آنرا تصحیح نمایند.

تحکیم درس(17) دقیقه

برای اینکه شاگردان درس جدید را خوبتر فرا گیرند مثال 5 صفحۀ(205) کتاب درسی را روی تخته نوشته و به حل آن اقدام نمایید؛ طوریکه شاگردان در حل مثال فعالانه سهم داشته باشند.

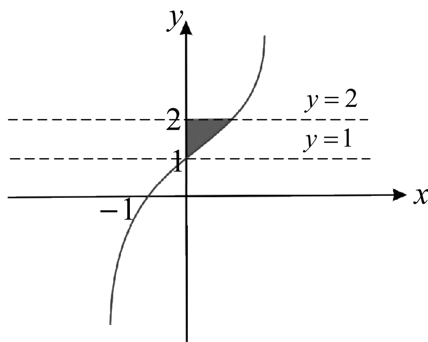
ارزیابی ختم درس (5) دقیقه

به خاطر اینکه اطمینان حاصل نمایید آیا شاگردان موضوع درس جدید را درک نموده اند یاخیر؟ به ارتباط این درس چنین سؤالات را طرح نمایید:

- برای تعیین نمودن سطح گراف یک تابع چه باید کرد؟
- چه وقت انتیگرال یک تابع منفی است ؟
- اگر گراف یک تابع متناظر باشد مساحت آنرا چطور می توان دریافت کرد؟

جواب به سؤال های تمرین

2– مساحت سطح محصور شده توسط منحنی تابع $y=x^3+1$ و محور y وخطوط $y=1$ و $y=2$ را نظر به شکل دریابید.



حل: نقطهٔ تقاطع با محور y را دریافت می‌کنیم: $x=0\ ,\quad y=x^3+1=0+1=1 \ \Rightarrow\ y=1$

نقطهٔ بحرانی $(x,y)=(0,1)$

$$y=0\ ,\quad x^3+1=0\ ,\quad \sqrt[3]{x^3}=\sqrt[3]{-1}\ \Rightarrow\ x=\sqrt[3]{-1}\ \Rightarrow\ x=-1$$

$$x^3+1=y$$

$$x^3=y-1\ \Rightarrow\ x=\sqrt[3]{y-1}$$

$$A=\int_1^2 xdy=\int_1^2\sqrt[3]{y-1}dy=\int_1^2(y-1)^{\frac{1}{3}}dy=\left[\frac{(y-1)^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1}\right]_1^2=\left[\frac{(y-1)^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}\right]_1^2$$

$$=\left[\frac{3}{4}(y-1)^{\frac{4}{3}}\right]_1^2=\left[\frac{3}{4}\cdot\sqrt[3]{(y-1)^4}\right]_1^2=\frac{3}{4}\left[\sqrt[3]{(2-1)^4}-\sqrt[3]{(1-1)^4}\right]=\frac{3}{4}\left[\sqrt[3]{1^4}-0\right]=\frac{3}{4}\cdot 1=\frac{3}{4}$$

3– مساحت سطح محصور شده توسط منحنی تابع $y=\dfrac{2x}{\sqrt{x^2+1}+x}$ و محور x و دو خط $x=0$ و $x=1$ را حساب کنید.

حل: برای حل سؤال انتیگرال تابع داده شده را در انتروال $[0,1]$ طور زیرحساب می‌کنیم:

$$A=\int_0^1\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}+x}dx=\int_0^1\left[\frac{2x(\sqrt{x^2+1}-x)}{(\sqrt{x^2+1}+x)(\sqrt{x^2+1}-x)}\right]dx=\int_0^1\left[\frac{2x((x^2+1)^{\frac{1}{2}}-x)}{(\sqrt{x^2+1})^2-x^2}\right]dx$$

$$=\int_0^1\left[\frac{2x(x^2+1)^{\frac{1}{2}}-2x^2}{x^2+1-x^2}\right]dx=\int_0^1\left[2x(x^2+1)^{\frac{1}{2}}-2x^2\right]dx=\left[\frac{(x^2+1)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}-\frac{2x^3}{3}\right]_0^1$$

$$=\left[\frac{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}-\frac{2}{3}x^3\right]_0^1=\frac{2}{3}\left[\sqrt{(x^2+1)^3}-x^3\right]_0^1=\frac{2}{3}\left[(x^2+1)\sqrt{x^2+1}-x^3\right]_0^1$$

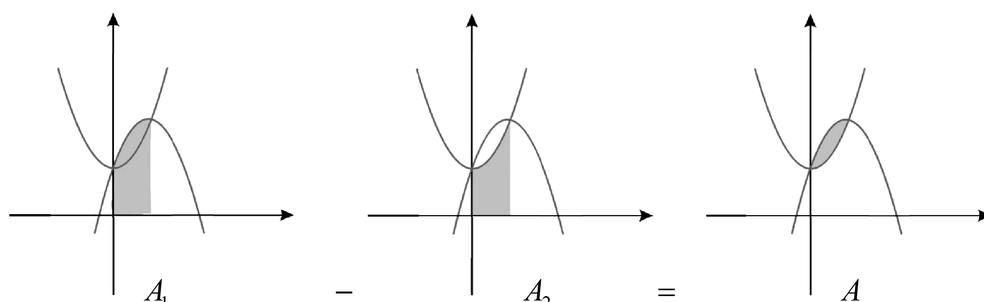
$$=\frac{2}{3}\left[(1+1)\sqrt{1+1}-\cdot 1-(0+1)\sqrt{0+1}+0\right]=\frac{2}{3}\left[2\sqrt{2}-\frac{2}{3}\right]=\frac{4}{3}\sqrt{2}-\frac{4}{3}=\frac{4\sqrt{2}-4}{3}$$

فصل ششم

عنوان: محاسبهٔ مساحت سطح محصور شده توسط دو منحنی

صفحهٔ کتاب: (207– 208)

وقت تدریس:(2 ساعت درسی)ساعت اول درسی



اهداف آموزشی **- دانشی** **- مهارتی** **- ذهنیتی**	– شاگردان مفهوم مساحت سطح محصور شده توسط دو منحنی را بدانند. – شاگردان گراف توابع داده شده را ترسیم کرده بتوانند. – شاگردان به حل مثال های مساحت سطح محصور شده توسط دو منحنی علاقه‌مند شوند و آنرا در زنده گی روز مرهٔ شان به کار ببرند.
روش های تدریس	سؤال وجواب ، کار گروهی
مواد ممد درسی	بکس هندسی، چارت شکل ورودی.
توضیح ورودی **(5) دقیقه**	بعد از انجام کار های مقدماتی تدریس که بعد از داخل شدن به صنف برای هر معلم ضرور است، به ارائهٔ درس جدید بپردازید، برای این کار چارت شکل ورودی را که از قبل تهیه نموده‌اید پیش روی صنف آویزان کرده و از شاگردان در مورد آن چنین سؤال نمایید: در شکل ورودی چی را می بینید؟ – اگر از قسمت رنگ شدهٔ مساحت A_1 مساحت A_2 را تفریق کنیم کدام مساحت به دست می آید؟ در صورتیکه شاگردان جواب درست ارائه کردند خوب و در غیر آن شکل ورودی را طور زیر توضیح نمایید. در شکل ورودی سه گراف مشاهده می گردد که در هر گراف دو منحنی یکدیگر را در دو نقطه قطع و قسمت های مختلف این منحنی ها رنگ شده است. اگر از قسمت رنگ شدهٔ مساحت A_1 مساحت A_2 را تفریق کنیم مساحت A به دست می‌آید که عبارت از مساحت سطح محصور شده توسط دو منحنی می باشد. بعد سؤال ورودی را بپرسید.

فعالیت جریان درس (23)دقیقه

برای اجرای فعالیت صفحهٔ(207) کتاب درسی، شاگردان را به گروه های مناسب تقسیم و آنها را موظف سازید تا با مشورهٔ یکدیگر این فعالیت را انجام دهند.

در جریان فعالیت از گروه ها نظارت به عمل آرید تا تمام اعضای گروه در انجام فعالیت سهیم باشند و در صورت مشکل آنها را رهنمایی کنید. در ختم فعالیت از نمایندهٔ دو گروه بخواهید تا به نماینده گی از گروه خود پیش روی تخته آمده، کار گروهی خویش را به دیگران واضح سازند، حال نتایجی که از انجام فعالیت فوق به دست آمده آنرا تشریح کرده و بعد روابط آنها را به روی تخته بنویسید.

اکنون مثال 1 صفحهٔ(208) کتاب درسی را روی تخته بنویسید، نخست نقاط تقاطع تابع با محورات را دریافت کرده؛ سپس گراف آنرا ترسیم نمایید بعد مساحت آنرا به کمک گراف و سهم فعال شاگردان محاسبه کنید؛ یعنی در جریان حل مثال از شاگردان سؤال کنید و جواب‌های قناعت بخش را به دست آرید.

تحکیم درس (12) دقیقه

برای اینکه شاگردان به مفهوم درس بهتر پی ببرند؛ در مورد نکات بارز درس ارائه شده از شاگردان سؤالاتی را طرح نمایید و جواب‌های قناعت‌بخش را به دست آورید؛ مثلاً بپرسید:

- برای محاسبه مساحت سطح محصور شده توسط دو منحنی چطور می‌توان گفت که کدام تابع باید از کدام تابع تفریق گردد؟
- هرگاه دو تابع به روی گراف، هیچ نقطه تقاطع نداشته باشند آیا می‌توان مساحت آنها را دریافت نمود؟

ارزیابی ختم درس (5) دقیقه

به منظور اینکه مطمئن شوید آیا شاگردان به موضوع درس جدید پی برده اند یاخیر؟ سؤالات مانند زیر طرح و بپرسید:

- برای محاسبه مساحت سطح محصور شده توسط دو منحنی کدام مراحل باید در نظر گرفته شود؟
- اگر تابع $f(x) < g(x)$ باشد گراف کدام تابع بالا تر است؟

جواب به سؤال های تمرین

1- مساحت سطح محصورشده توسط دو منحنی $y = x^2$ و $y = -x^2 + 4x$ را در یابید.

حل: نقاط تقاطع $y = x^2$ و $y = -x^2 + 4x$ را دریافت می‌نماییم:

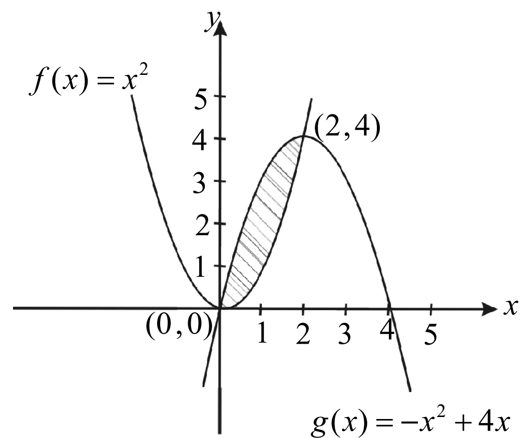
$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = -x^2 + 4x \end{cases}$$

حال نقاط تقاطع تابع‌های $f(x)$ او $g(x)$ را پیدا می‌کنیم:

$$f(x) = x^2 \quad , \quad g(x) = -x^2 + 4x$$
$$f(x) = g(x)$$
$$x^2 = -x^2 + 4x$$
$$x^2 + x^2 - 4x = 0$$
$$2x^2 - 4x = 0$$
$$2x(x-2) = 0$$
$$2x = 0 \quad \Rightarrow \; x = 0 \; , \quad y = 0$$
$$x - 2 = 0 \; \Rightarrow \; x = 2 \; , \quad y = 4$$

چون در گراف بالا تابع $g(x)$ فوق تـابع $f(x)$ اسـت و هـم نقـاط تقـاطع هـر دو منحنـی عبـارت از $(2,4)$ و $(0,0)$ می‌باشد؛ پس مساحت سطح محصور شدهٔ آنرا چنین محاسبه می‌کنیم:

$$A = \int_0^2 \left[(-x^2 + 4x) - (x^2)\right]dx = \int_0^2 \left[(-x^2 + 4x - x^2)\right]dx$$
$$= \int_0^2 \left[(-2x^2 + 4x)\right]dx = 2\int_0^2 \left[(-x^2 + 2x)\right]dx$$
$$= 2\left[\int_0^2 -x^2 dx + 2\int_0^2 x dx\right]$$
$$= -2\frac{x^3}{3}\Big|_0^2 + 4\frac{x^2}{2}\Big|_0^2 = -\frac{2}{3}(8) + 2(4)$$
$$= -\frac{16}{3} + 8 = \frac{24-16}{3} = \frac{8}{3} = 2.\overline{6}$$



فصل ششم

عنوان: مساحت سطح محصور شده توسط دو منحنی

صفحهٔ کتاب: (208– 210)

وقت تدریس: ساعت دوم درسی

اهداف آموزشی **- دانشی** **- مهارتی** **- ذهنیتی**	– شاگردان مفهوم مساحت سطح محصور شده توسط دو منحنی را بدانند. – شاگردان با استفاده از گراف، مساحت سطح محصور شده را حساب کرده بتوانند. – شاگردان به حل مثال‌ها و سؤال‌های مساحت سطح محصور شده توسط دو منحنی علاقه‌مند شوند.
روش های تدریس	سؤال وجواب ، کار انفرادی
مواد ممد درسی	بکس هندسی، چارت شکل ورودی
توضیح ورودی **(5) دقیقه**	بعد از انجام کار های مقدماتی تدریس که برای هر معلم حتمی است، درس روز گذشته را مختصراً ارزیابی کنید. حال مانند ساعت قبلی چارت شکل ورودی را که از قبل تهیه نموده اید پیش روی صنف آویزان و توضیح نمایید.

فعالیت جریان درس (30)دقیقه

مثال 2 صفحهٔ(208) کتاب درسی را روی تخته بنویسید و آنرا با سهم گیری فعال شاگردان حل نمایید.
اکنون مثال 3 صفحهٔ(209) کتاب درسی را روی تخته نوشته و از شاگردان بخواهید تا مثال را به شکل انفرادی در کتابچه های شان حل کنند. همزمان از یک شاگرد دیگر بخواهید تا این کار را به روی تخته انجام دهد. اگر در حل مثال کدام اشتباهی وجود داشت از یک شاگرد داوطلب دیگر بخواهید تا آنرا اصلاح کند. زمانیکه مطمئن شدید که حل مثال روی تخته درست است از سایر شاگردان بخواهید تا طریقهٔ حل شان را با حل روی تخته مقایسه نمایند. این کار به شاگردانی که دچار اشتباه شدند کمک می کند تا به اشتباهی خود پی برده و آنرا اصلاح کنند.

تحکیم درس (5) دقیقه

برای اینکه شاگردان درس امروز را بهتر فرا گیرند، سؤال دوم تمرین مربوط این درس را که در صفحه(210) کتاب درسی آمده است، آنرا به روی تخته بنویسید و با سهم گیری فعال شاگردان حل کنید؛ یعنی در جریان حل سؤال از شاگردان سؤالات نموده و جواب های درست حاصل نمایید.

ارزیابی ختم درس (5) دقیقه

برای اینکه اطمینان حاصل نمایید که آیا شاگردان درس امروز را درست درک کرده اند یاخیر؟ آنها را مختصراً ارزیابی کنید؛ طوریکه چندین سؤال در مورد درس ارائه شده طرح و از شاگردان جواب به دست آرید؛ مثلاً بپرسید:

- نقاط تقاطع دو منحنی را چطور به دست می آوریم؟
- رابطه $f(x) > g(x)$ نشان دهندهٔ چیست؟

جواب به سؤال های تمرین

2- مساحت سطح محصور شده توسط پارابولای $y^2 = 2x-2$ و $y = x-5$ را حساب کنید.

حل:

$$\begin{cases} y^2 = 2x-2 \quad , \quad -2x = -y^2 - 2 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{2}y^2 + 1 \\ y = x-5 \quad , \quad -x = -5-y \quad \Rightarrow \quad x = y+5 \end{cases}$$

$$f(y) = \frac{1}{2}y^2 + 1 \quad , \quad g(y) = y+5 \quad \Rightarrow \quad f(y) = g(y)$$

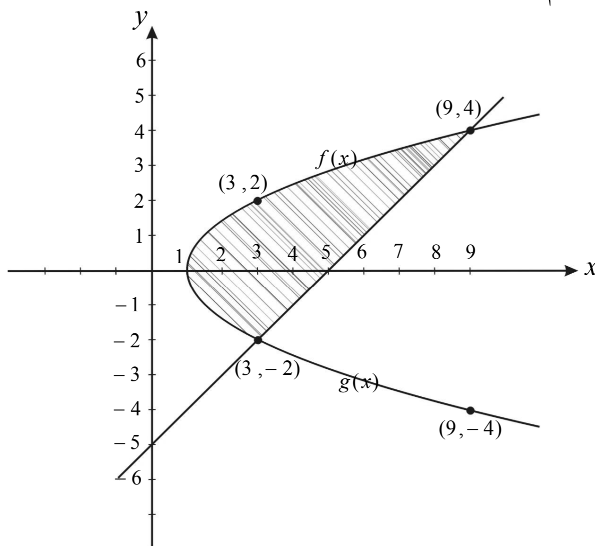
$$\frac{1}{2}y^2 + 1 = y+5 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}y^2 - y - 5 + 1 = 0$$

$$\frac{1}{2}y^2 - y - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad (\frac{1}{2}y - 2)(y+2) = 0$$

$$\frac{1}{2}y - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}y = 2 \ , \quad \boxed{y=4} \quad \Rightarrow \quad \boxed{x=9}$$

$$y+2=0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{y=-2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{x=3}$$

اکنون گراف توابع $f(x)$ و $g(x)$ را طور زیر ترسیم می کنیم:



$$y^2 = 2x - 2$$

$$y^2 + 2 = 2x$$

شکل پارابولا را دارد:

$$x = 1 \quad , \quad y = 0$$

$$x = 3 \quad , \quad y = \pm 2$$

$$x = 9 \quad , \quad y = \pm 4$$

$$y = x - 5$$

برای ترسیم خط مستقیم کافی است که دو نقطهٔ آن معلوم باشد.

$$(3,-2) \ , \ (9,4)$$

دو نقطهٔ خط مستقیم و هم نقاط تقاطع منحنی و خط مستقیم می‌باشد. گراف تابع $g(y)$ فوق گراف تابع $f(y)$ است؛ پس داریم که:

$$A = \int_a^b [g(y) - f(y)]dy = \int_a^b g(y)\,dy - \int_a^b f(y)dy$$

$$A = \int_{-2}^{4} \left[(y+5) - (\frac{1}{2}y^2 + 1) \right] dy = \int_{-2}^{4} (y+5)\,dy - \int_{-2}^{4} \frac{1}{2}y^2 - \int_{-2}^{4} 1dy$$

$$A = \left[\frac{(y+5)^2}{2} \right]_{-2}^{4} - \left[\frac{1}{6}y^3 \right]_{-2}^{4} - [y]_{-2}^{4} = \frac{1}{2}\left[(4+5)^2 - (-2+5)^2\right] - \frac{1}{6}[64+8] - [4+2]$$

$$A = \frac{1}{2}[81-9] - \frac{1}{6}[72] - [6] = \frac{72}{2} - \frac{72}{6} - 6 = 36 - 12 - 6 = 36 - 18 = 18$$

3 - مساحت سطح محصور شده توسط منحنی تابع $y^2 = 2x+6$ و خط $y = x-1$ را محاسبه کنید.

حل : ابتدا نقاط تقاطع خط و منحنی را دریافت می‌کنیم:

$$\begin{cases} y^2 = 2x+6 \quad , \quad -2x = -y^2+6 \Rightarrow \quad x = \frac{1}{2}y^2 - 3 \\ y = x-1 \quad , \quad -x = -y-1 \Rightarrow \quad x = y+1 \end{cases}$$

$$f(y) = \frac{1}{2}y^2 - 3 \quad , \quad g(y) = y+1$$

$$f(y) = g(y)$$

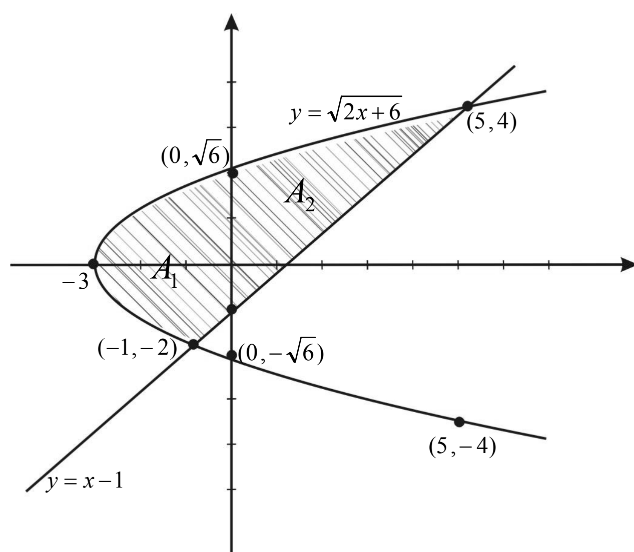
$$\frac{1}{2}y^2 - 3 = y+1 \Rightarrow \quad \frac{1}{2}y^2 - y - 3 - 1 = 0$$

$$\frac{1}{2}y^2 - y - 4 = 0 \Rightarrow \quad (\frac{1}{2}y - 2)(y+2) = 0$$

$$\frac{1}{2}y - 2 = 0 \Rightarrow \quad \frac{1}{2}y = 2 \quad , \quad y = 4$$

$$y+2 = 0 \Rightarrow \quad y = -2$$

خط مستقیم $y = x-1$ را ترسیم می‌نماییم و هم $y^2 = 2x+6$ پارابولایی است که رأس آن در نقطهٔ $(-3,0)$ قرار داشته و از نقاط $(5,4)$ و $(5,-4)$ می‌گذرد و محور y را در نقاط $(0,-\sqrt{6})$ و $(0,\sqrt{6})$ قطع می‌کند.



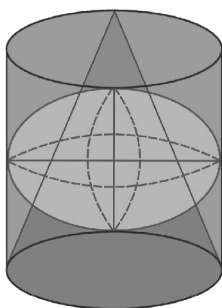
نظر به شکل نقاط تقاطع خط و منحنی عبارت از $(5,4)$ و $(-1,-2)$ می باشد، همچنان x تابع y است پس گراف تابع $g(x)$ به طرف راست گراف تابع $f(x)$ واقع بوده داریم که:

$$A = \int_a^b [g(y) - f(y)]dy = \int_a^b g(y)\,dy - \int_a^b f(y)\,dy$$

$$A = \int_{-2}^{4} \left[(y+1) - (\frac{1}{2}y^2 - 3) \right] dy = \int_{-2}^{4} \left[-\frac{1}{2}y^2 + y + 4 \right] dy = \int_{-2}^{4} -\frac{1}{2}y^2 dy + \int_{-2}^{4} y\,dy + \int_{-2}^{4} 4dy$$

$$A = -\frac{1}{2}\left[\frac{y^3}{3}\right]_{-2}^{4} + \left[\frac{y^2}{2}\right]_{-2}^{4} + [4y]_{-2}^{4} = -\frac{1}{6}[64+8] + \frac{1}{2}[16-4] + 4[4-(-2)]$$

$$A = -\frac{1}{6}[72] + \frac{1}{2}[12] + [16+8] = -\frac{72}{6} + 6 + 24 = -\frac{72}{6} + 30 = \frac{-72+180}{6} = \frac{108}{6} = 18$$



فصل ششم

عنوان: محاسبه حجم اجسام دورانی

صفحهٔ کتاب: (211– 214)

وقت تدریس: (2 ساعت درسی)ساعت اول درسی

اهداف آموزشی **- دانشی** **- مهارتی** **- ذهنیتی**	- شاگردان مفهوم حجم اجسام دورانی را بدانند. - شاگردان حجم اجسام دورانی را دریافت کرده بتوانند. - شاگردان به محاسبه حجم اجسام دورانی علاقه‌مند شده و اشکال مختلف اجسام دورانی را نظر به محیط و ماحول شان تشخیص دهند.
روش های تدریس	سؤال وجواب ، کار گروهی و انفرادی
مواد ممد درسی	بکس هندسی، چارت شکل ورودی
توضیح ورودی **(5) دقیقه**	کار های مقدماتی تدریس که بعد از داخل شدن به صنف برای هر معلم حتمی است انجام دهید بعد درس روز گذشته را مختصراً ارزیابی کنید. حال جهت توضیح شکل ورودی این درس ابتدا چارت شکل ورودی را که از قبل آماده نموده اید پیش روی صنف آویزان کرده بعد در مورد آن از شاگردان بپرسید: - در شکل ورودی چی می بینید؟ هر یک را نام ببرید. - فارمول حجم این اشکال را بیان دارید. - حجم این اشکال را با هم مقایسه کنید. بعد از این که جوابات شاگردان را شنیدید شکل ورودی را چنین توضیح کنید: در شکل ورودی سه جسم دورانی به مشاهده می رسد، استوانه، مخروط و کره که در اینجا حجم استوانه بیشتر از دو جسم دیگر است، چرا که مخروط و کره در داخل آن جا شده که فارمول حجم کره $(\frac{4}{3}\pi r^3)$، حجم مخروط $(\frac{1}{3}\pi r^2)$ و حجم استوانه $(\pi r^2 \cdot h)$ می باشد و از مقایسه آنها می یابیم که: $\pi r^2 \cdot h > \frac{1}{3}\pi r^2 > \frac{4}{3}\pi r^3$ حجم کره < حجم مخروط < حجم استوانه

فعالیت جریان درس(28) دقیقه

برای اجرای فعالیت همین صفحه شاگردان را به گروه های مناسب تقسیم و به آنها وظیفه دهید تا فعالیت را با مشورهٔ یکدیگر انجام دهند. در وقت اجرای فعالیت از گروه ها نظارت به عمل آرید تا تمام آنها در انجام کار گروهی سهیم باشند. اگر شاگردان در وقت اجرای فعالیت به کدام مشکلی روبرو می شوند آنها را رهنمایی کنید.

در ختم فعالیت نتایج که از انجام آن به دست می آید، اشکال هر یک را به ترتیب ترسیم، توضیح و بعد روابط آنها را روی تخته بنویسید.

حال جهت ثبوت حجم کره که در صفحهٔ(212) کتاب درسی آمده است از یک شاگرد بخواهید تا شکل کره را روی تخته ترسیم نموده، بعد فارمول حجم آنرا ثبوت نماید. همزمان از شاگردان دیگر بخواهید تا به شکل انفرادی این کار را در کتابچه های شان انجام دهند. اگر در ثبوت روی تخته کدام اشتباهی وجود داشت از یک شاگرد داوطلب دیگر بخواهید تا آنرا اصلاح کند. زمانیکه مطمئن شدید ثبوت روی تخته کاملاً درست است از سایر شاگردان بخواهید تا کار کتابچه های شان را با ثبوت روی تخته مقایسه و اگر اشتباهی موجود بود آنرا اصلاح کنند.

ارزیابی ختم درس (5) دقیقه:

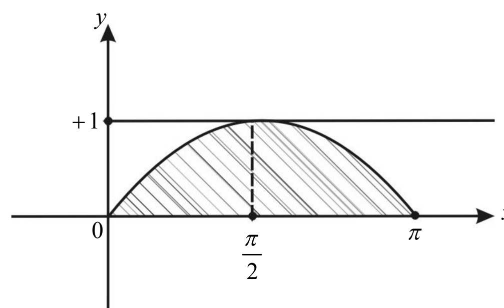
برای اینکه مطمئن شوید آیا شاگردان درس جدید را بهتر فرا گرفته اند یاخیر؟ شاگردان را ارزیابی کنید برای این کار چندین سؤال پرسیده و از شاگردان جواب‌های قناعت بخش به دست آرید.

- حجم را تعریف کنید.
- چطور می توان حجم اجسام دورانی را محاسبه کرد؟
- فارمول حجم یک جسم دورانی نظر به محور x و y مساوی به چیست؟

جواب به سؤال های تمرین

1- حجم جسمی را که از دوران سطح محصور شده توسط منحنی تابع $y = \sin x$ و دو خط $x = 0$ و $x = \pi$ به حول محور x به وجود می آید حساب کنید.

حل:



$$V = \int_a^b \pi\, y^2 dx = \int_a^b \pi [f(x)]^2 dx$$

$$V = \int_0^\pi \pi\, y^2 dx = \int_0^\pi \pi \sin^2 x dx$$

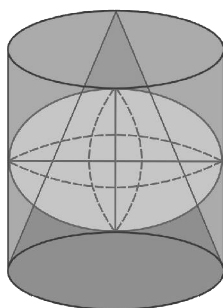
$$V = \int_0^\pi \pi (\frac{1-\cos 2x}{2}) dx$$

$$V = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi (1-\cos 2x) dx = \frac{\pi}{2}(\int_0^\pi dx - \int_0^\pi \cos 2x dx)$$

$$V = \frac{\pi}{2}[x]_0^\pi - \frac{\pi}{2}\left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^\pi = \frac{\pi}{2}[\pi - 0] - \frac{\pi}{2}\left[\frac{1}{2}\sin 2\pi - \frac{1}{2}\sin 2\cdot 0\right]$$

$$V = \frac{\pi}{2}[\pi] - \frac{\pi}{2}\left[\frac{1}{2}\sin 2\pi\right] = \frac{\pi}{2}\left[\pi - \frac{1}{2}\sin 360^\circ\right] = \frac{\pi}{2}\left[\pi - \frac{1}{2}\cdot 0\right]$$

$$V = \frac{\pi}{2}[\pi] = \frac{\pi^2}{2} = \frac{(3.1415)^2}{2} = \frac{9.8691}{2} = 4.9346$$



فصل ششم

عنوان: محاسبه حجم اجسام دورانی

صفحهٔ کتاب: (214– 216)

وقت تدریس: ساعت دوم درسی

اهداف آموزشی **- دانشی** **- مهارتی** **- ذهنیتی**	- شاگردان مفهوم حجم اجسام دورانی را بدانند. - شاگردان حجم اجسام دورانی را محاسبه کرده بتوانند. - شاگردان به حل سؤال‌ها و مثال‌های حجم اجسام دورانی علاقه‌مند شده و آنرا در زندگی روزمرهٔ خویش به کار ببرند.
روش های تدریس	سؤال وجواب ، کار انفرادی
مواد ممد درسی	بکس هندسی، چارت شکل ورودی
توضیح ورودی (5) دقیقه	بعد از انجام کار های مقدماتی تدریس به ارائه درس جدید بپردازید. نخست شکل ورودی را توضیح نموده، برای این کار مانند ساعت قبلی چارت شکل ورودی را که از قبل تهیه نموده اید یکبار دیگر پیش روی صنف آویزان و مختصراً توضیح کنید، در جریان توضیح از شاگردان سؤال نموده و جواب های قناعت بخش را به دست آورید.

فعالیت جریان درس (28)دقیقه

بعد از توضیح ورودی جهت ثبوت فورمول حجم الپس که در صفحهٔ(214) کتاب درسی نیز آمده است، ابتدا شکل آنرا روی تخته ترسیم کرده، بعد با استفاده از شکل سرحدات انتیگرال را مشخص و حجم آنرا ثبوت کنید. سعی نمایید تا در اثنای ثبوت شاگردان نیز سهم فعال داشته باشند، یعنی از آنها سؤال کنید و جواب‌های قناعت بخش به دست آرید.

اکنون مثال 1 و 2 صفحهٔ(215) کتاب درسی را روی تخته بنویسید و از دو شاگرد به نوبت بخواهید تا هر کدام یک یک مثال را روی تخته حل کنند. همزمان از سایر شاگردان بخواهید تا مثال‌های مذکور را در کتابچه های خود حل نمایند. اگر در حل مثال کدام مشکلی وجود داشت از یک شاگرد داوطلب دیگر بخواهید تا آنرا اصلاح کند.

وقتیکه مطمئن شدید که حل روی تخته کاملاً درست است از سائر شاگردان بخواهید تا طریقهٔ حل کتابچه‌های خود را با حل روی تخته مقایسه نمایند و اگر دچار کدام اشتباهی شده بودند آنرا اصلاح و به غلطی خود پی ببرند.

تحکیم درس (5) دقیقه

برای اینکه شاگردان درس ارائه شده را خوبتر درک کنند؛ یادداشت که در صفحهٔ(215) کتاب درسی موجود است ابتدا شکل آنرا روی تخته ترسیم کرده بعد متن آنرا توضیح و روابط هر کدام را جدا به روی تخته بنویسید تا تفهیم شاگردان گردد.

حال مثال که به ارتباط این یادداشت در صفحهٔ(216) کتاب آمده است. شکل آنرا روی تخته رسم کرده بعد با استفاده از شکل حجم آنرا حساب کنید؛ طوریکه شاگردان در هنگام حل مثال سهم فعال داشته باشند.

ارزیابی ختم درس (5) دقیقه

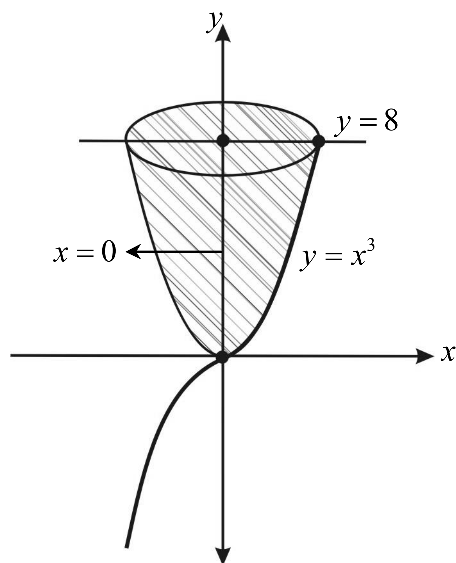
برای اینکه اطمینان تان حاصل شود که آیا شاگردان درس امروز را فرا گرفته اند یاخیر؟ با طرح چند سؤال به طور مختصر درس را ارزیابی کنید؛ مانند:

- فارمول حجم الیپس از اثر دوران حول قطر بزرگ مساوی به چیست؟
- در صورتیکه گراف تابع $f(x)$ بالای گراف تابع $g(x)$ و یا عکس آن قرار داشته باشد. حجم آنها از کدام روابط به دست می آیند؟

جواب به سؤال های تمرین

2- حجم جسمی را که از دوران سطح محصور شده توسط منحنی $y = x^3$ و خط $y = 8$ و $x = 0$ به حول محور y به دست می آید حساب کنید.

حل:



$$V = \int_a^b \pi x^2 dy = \int_a^b \pi\left[f(y)\right]^2 dy$$

$$y = x^3 \quad , \quad \sqrt[3]{y} = \sqrt[3]{x^3} \Rightarrow \quad x = y^{\frac{1}{3}}$$

$$V = \int_a^b \pi x^2 dy = \int_0^8 \pi (y^{\frac{1}{3}})^2 dy = \int_0^8 \pi (y^{\frac{2}{3}}) dy$$

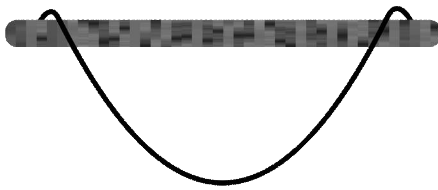
$$= \pi\left[\frac{y^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1}\right]_0^8 = \pi\left[\frac{y^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}}\right]_0^8 = \frac{3}{5}\pi\left[y^{\frac{5}{3}}\right]_0^8$$

$$V = \frac{3}{5}\pi\left[\sqrt[3]{y^5}\right]_0^8 = \frac{3}{5}\pi\left[\sqrt[3]{8^5} - 0\right]$$

$$= \frac{3}{5}\pi\left[\sqrt[3]{8^5}\right] = \frac{3}{5}\pi\left[2^5\right] \qquad \boxed{\sqrt[3]{8} = 2}$$

$$V = \frac{3}{5}\pi\left[32\right] = \frac{96\pi}{5}$$

فصل ششم



عنوان: محاسبهٔ طول قوس

صفحهٔ کتاب: (217– 218)

وقت تدریس: (2 ساعت درسی)ساعت اول درسی

اهداف آموزشی **- دانشی** **- مهارتی** **- ذهنیتی**	- شاگردان محاسبهٔ طول قوس را بدانند. - شاگردان با استفاده از فارمول طول قوس فارمول محیط دایره را دریافت کرده بتوانند. - شاگردان به محاسبهٔ طول قوس علاقه‌مند شوند.
روش های تدریس	سؤال وجواب ، کار گروهی
مواد ممد درسی	بکس هندسی، چارت شکل ورودی
توضیح ورودی **(5) دقیقه**	بعد از انجام کار های مقدماتی تدریس که برای هر معلم در صنف ضروری است به ارائه درس جدید بپردازید. ابتدا بخش ورودی این درس را توضیح کنید و برای این کار چارت شکل ورودی را که از قبل آماده نموده اید پیش روی صنف آویزان و به شاگردان بگویید که به شکل ورودی به دقت توجه نمایند. بعد از آنها بپرسید در شکل ورودی این درس چی می بینید؟ بعد از جواب شاگردان شکل ورودی را چنین واضح سازید. در شکل یک ریسمان و یک چوب به ملاحظه میرسد که هر دو سر ریسمان به چوب طوری بسته شده است که ریسمان شکل یک منحنی را به خود گرفته است، حال طول قوس را که توسط ریسمان به وجود آمده است به رادیان حساب می کنیم و هم میدانیم که رادیان عبارت از وسعت زاویه مرکزی است که طول قوس مقابل آن مساوی به شعاع دایره می باشد.

فعالیت جریان درس (28)دقیقه

برای اجرای فعالیت گروهی شاگردان را به گروه‌های مناسب تقسیم نموده و به آنها وظیفه دهید تا فعالیت صفحهٔ(217) کتاب درسی را در گروه‌های مربوطهٔ شان با مشورت یکدیگر انجام دهند.

در اخیر فعالیت در صورت داشتن وقت از نمایندهٔ تمام گروه ها بخواهید تا به نوبت مقابل صنف بیایند و کار گروهی مربوط گروه خود را به دیگران توضیح نمایند اگر کدام شاگرد روی تخته اشتباهی کرد، آنرا اصلاح نمایید.در ختم فعالیت نتیجه‌یی که از آن به دست می‌آید آنرا ثبوت نمایید برای این کار ابتدا شکل مربوطهٔ آنرا با سهم گیری شاگردان به روی تخته ترسیم کرده بعد با استفاده از شکل، فارمول طول قوس منحنی را ثبوت نمایید؛ طوریکه شاگردان در جریان ثبوت سهم فعال داشته باشند؛ یعنی از شاگردان سؤال نموده و جواب‌های قناعت بخش به دست آرید.

تحکیم درس (5) دقیقه

برای اینکه شاگردان موضوع درس جدید را بهتر بفهمند مثال که در صفحۀ(218) کتاب درسی به ارتباط محیط دایره آمده است نخست معادله آنرا روی تخته نوشته و بعد آنرا با سهمگیری فعال شاگردان ثبوت نمایید.

ارزیابی ختم درس (5) دقیقه

برای اینکه خود را مطمئن سازید که آیا شاگردان درس جدید را درک نموده اند یاخیر؟ شاگردان را ارزیابی کنید برای این کار چند سؤال در مورد درس ارائه شده طرح و از شاگردان جواب به دست آرید؛ مثلاً:

- طول قوس یک منحنی از کدام رابطه به دست می آید؟
- محیط دایره مساوی به چیست؟

جواب به سؤال های تمرین

1– طول قوس منحنی $x=t^2$ و $y=t^3$ را در انترول $1\le x\le 2$ در یابید.

حل:

$$L=\int_a^b\sqrt{(\frac{dx}{dt})^2+(\frac{dy}{dt})^2}\,dt \qquad \begin{matrix} x'=(t^2)'=2t \\ y'=(t^3)'=3t^2 \end{matrix}$$

$$L=\int_1^2\sqrt{(x')^2+(y')^2}\,dt=\int_1^2\sqrt{(2t)^2+(3t^2)^2}\,dt=\int_1^2\sqrt{4t^2+9t^4}\,dt=\int_1^2 t\sqrt{4+9t^2}\,dt$$

حال افادۀ تحت جذر را به u تعویض می کنیم:

$$u=4+9t^2 \quad , \quad du=18tdt \Rightarrow \ tdt=\frac{1}{18}du$$

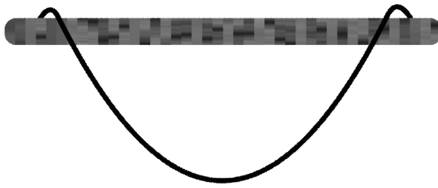
$$\begin{cases} t=1 \\ u=4+9t^2=4+9\cdot 1^2=4+9=13 \Rightarrow \ u=13 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t=2 \\ u=4+9t^2=4+9\cdot(2)^2=4+9(4)=4+36 \\ u=40 \end{cases}$$

$$L=\int_1^2 t\sqrt{4+9t^2}\,dt=\int_{13}^{40}\sqrt{u}\cdot\frac{1}{18}du=\frac{1}{18}\int_{13}^{40}\sqrt{u}\,du=\frac{1}{18}\int_{13}^{40}u^{\frac{1}{2}}du=\frac{1}{18}\left[\frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right]_{13}^{40}=\frac{1}{18}\left[\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_{13}^{40}=\frac{1}{18}\cdot\frac{2}{3}\left[u^{\frac{3}{2}}\right]_{13}^{40}$$

$$=\frac{2}{54}(40^{\frac{3}{2}}-13^{\frac{3}{2}})=\frac{1}{27}(40^{\frac{3}{2}}-13^{\frac{3}{2}})=\frac{1}{27}(\sqrt{(40)^3}-\sqrt{(13)^3})=\frac{1}{27}(\sqrt{64000}-\sqrt{2197})=\frac{1}{27}(80\sqrt{10}-13\sqrt{13})$$

فصل ششم



عنوان: محاسبهٔ طول قوس

صفحهٔ کتاب: (219– 220)

وقت تدریس: ساعت دوم درسی

اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	- شاگردان مفهوم محاسبهٔ طول قوس را بدانند. - شاگردان طول قوس یک منحنی را نظر به محور x یا y حساب کرده بتوانند. - شاگردان به دریافت طول قوس یک منحنی علاقه‌مند شده و آنرا در زنده‌گی روزمرهٔ خویش به کار ببرند.
روش های تدریس	سؤال وجواب، کار انفرادی
مواد ممد درسی	چارت شکل ورودی
توضیح ورودی (5) دقیقه	بعد از انجام کار های مقدماتی تدریس طبق معمول درس روز گذشته را مختصراً ارزیابی کنید بعد به ارائه درس جدید بپردازید؛ برای این کار چارت شکل ورودی ساعت قبلی را یکبار دیگر پیش روی صنف آویزان و به ارتباط آن به شاگردان معلومات مختصر بدهید تا دوباره فکر آنها به درس جدید منسجم گردد.

فعالیت جریان درس (28)دقیقه

یادداشت که در صفحهٔ(219) کتاب درسی آمده است ابتدا شمارهٔ 1 آنرا که محاسبهٔ طول قوس یک منحنی نظر به پارامتر x است به شاگردان توضیح کرده بعد رابطه آنرا روی تخته بنویسید تا خوب تفهیم گردد؛ همچنان مثال آنرا روی تخته بنویسید و با سهم‌گیری فعالانه شاگردان آنرا حل کنید.

سپس یادداشت شمارهٔ 2 را که محاسبه طول قوس یک منحنی نظر به پارامتر y است به شاگردان توضیح نموده بعد مثال آنرا روی تخته نوشته و از یک شاگرد بخواهید تا آنرا حل کند. همزمان از شاگردان دیگر بخواهید تا این مثال را به شکل انفرادی در کتابچه های شان حل کنند، اگر در حل مثال کدام اشتباهی وجود داشت از یک شاگرد داوطلب دیگر بخواهید تا آنرا اصلاح کند، زمانیکه مطمئن شدید که حل روی تخته کاملاً درست است پس در این صورت از سایر شاگردان بخواهید تا طریقهٔ حل کتابچه‌های خود را با حل روی تخته مقایسه و اگر کدام اشتباهی داشته باشد آنرا اصلاح نمایند.

تحکیم درس (7) دقیقه:

به منظور اینکه شاگردان درس امروز را خوبتر فرا گیرند نکات بارز این درس را یکبار دیگر برای آنها واضح سازید طوریکه شاگردان در هنگام توضیح سهم فعال داشته باشند.

ارزیابی ختم درس (5) دقیقه

برای اینکه اطمینان خاطر تان حاصل شود که آیا شاگردان مفهوم درس جدید را درست درک نموده اند یاخیر؟ با طرح چند سؤال درس را ارزیابی کنید؛ مثلاً بپرسید:

- طول قوس یک منحنی نظر به محور x از کدام رابطه به دست می آید؟
- طول قوس یک منحنی نظر به محور y از کدام فارمول محاسبه می گردد؟

جواب به سؤال های تمرین

2- طول قوس منحنی تابع $f(x)=\frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}}$ را در انتروال $0\le x\le 1$ حساب کنید.

حل: چون معادلهٔ منحنی تابع $f(x)=\frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}}$ در انتروال $0\le x\le 1$ داده شده است؛ پس داریم که:

$$f(x)=\frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}} \quad , \quad f'(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot x^{\frac{3}{2}-1} \Rightarrow f'(x)=\frac{3}{4}x^{\frac{1}{2}}$$

$$L=\int_a^b\sqrt{1+f'^2(x)}dx=\int_0^1\sqrt{1+(\frac{3}{4}x^{\frac{1}{2}})^2}\,dx=\int_0^1\sqrt{1+\frac{9}{16}x}dx$$

$$\begin{cases} u=1+\frac{9}{16}x \\ du=\frac{9}{16}dx \\ dx=\frac{16}{9}du \end{cases}$$

$$=\int_0^1\sqrt{u}\cdot\frac{16}{9}du=\frac{16}{9}\int_0^1\sqrt{u}du=\frac{16}{9}\int_0^1 u^{\frac{1}{2}}du=\frac{16}{9}\left[\frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right]_0^1=\frac{16}{9}\left[\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^1=\frac{16}{9}\cdot\frac{2}{3}\left[u^{\frac{3}{2}}\right]_0^1$$

$$=\frac{32}{27}\left[\sqrt{(1+\frac{9}{16}x)^3}\right]_0^1=\frac{32}{27}(\sqrt{(1+\frac{9}{16}\cdot 1)^3}-\sqrt{(1+\frac{9}{16}\cdot 0)^3})=\frac{32}{27}(\sqrt{(1+\frac{9}{16})^3}-\sqrt{1})$$

$$=\frac{32}{27}(\sqrt{(\frac{25}{16})^3}-1)=\frac{32}{27}(\sqrt{(\frac{5}{4})^6}-1)=\frac{32}{27}(\frac{125}{64}=-1)=\frac{32}{27}(\frac{125-64}{64})=\frac{32}{27}(\frac{61}{64})=\frac{61}{54}$$

فصل ششم

عنوان: نکات مهم فصل

صفحهٔ کتاب: (221- 222)

وقت تدریس: یک ساعت درسی

اهداف آموزشی **-دانشی** **- مهارتی** **- ذهنیتی**	- شاگردان مفهوم نکات مهم فصل را بدانند. - شاگردان سؤالات مربوط به نکات مهم فصل را جواب داده بتوانند. - شاگردان به جواب درست سؤالات مربوط به نکات مهم فصل علاقه‌مند شوند.
روش های تدریس	سؤال وجواب ، کار انفرادی
مواد ممد درسی	چارت تمام عناوین نکات مهم فصل ششم
توضیح ورودی **(5) دقیقه**	بعد از انجام کار های مقدماتی تدریس که بعد از داخل شدن به صنف ضروری است به ارائه نکات مهم فصل بپردازید. ابتدا چارت را که از قبل تهیه نموده اید پیش‌روی صنف آویزان نمایید؛ سپس توجه شاگردان را به نکات مهم این فصل معطوف داشته و اهمیت آنرا بیان دارید، تا آنها به اهمیت آن پی برده و علاقه به یادگیری بهتر آن از خود نشان دهند و نکات مهم را خوب فرا گیرند.

فعالیت جریان درس (28)دقیقه

از شاگردان بخواهید تا به نوبت مقابل صنف بیایند و یک یک عنوان را از روی چارت بخوانند، بعد در مورد توضیحات بدهند این کار را تا وقتی ادامه دهید تا همهٔ نکات مهم فصل توسط شاگردان واضح گردد، اگر در اثنای توضیحات شاگردان به کدام مشکلی روبرو می شوند، شما آنرا روی تخته یادداشت نموده و در اخیر آنرا توضیح نمایید؛ طوریکه شاگردان در هنگام توضیح سهم فعال داشته باشند.

تحکیم درس (5) دقیقه

به منظور اینکه شاگردان به اهمیت نکات مهم فصل خوبتر پی ببرند، هر یک از نکات مهم این فصل را که در اثنای توضیح آن شاگردان مشکل داشتند شما خود آنرا طوری واضح نمایید که تمام مشکلات آنها حل گردد و در درس های آینده کدام سؤالی نداشته باشند.

ارزیابی ختم درس (5) دقیقه

برای اینکه مطمئن شوید که آیا شاگردان به اهمیت نکات مهم این فصل پی برده اند یاخیر؟ با طرح چند سؤال به شکل خلاصه، درس را ارزیابی کنید؛ طور مثال:

- اگر تابع $f(x) \leq 0$ باشد گراف آن در کدام قسمت محور x واقع است؟

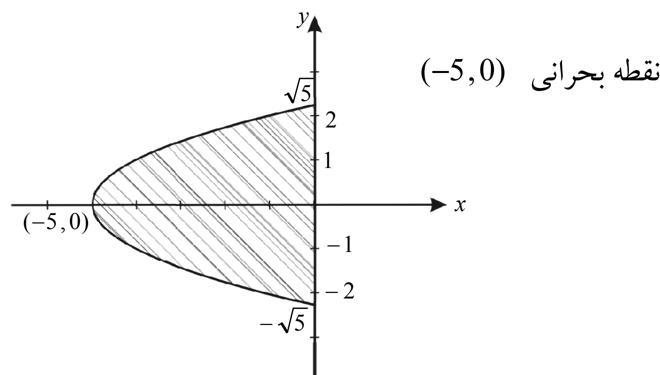
- در کدام صورت انتیگرال یک تابع را ضرب 2 می کنیم؟
- محاسبهٔ مساحت سطح محصور شده توسط دو منحنی دارای کدام شرطها است؟ روابط آنها را بنویسید.
- اگر یک منحنی حول محور y دوران کند حجم آن مساوی به چیست؟
- برای محاسبهٔ طول قوس یک منحنی از کدام رابطه می توان استفاده کرد؟

جواب به سؤال های تمرین

1- مساحت سطح محصور بین منحنی $y^2 - x - 5 = 0$ و محور y را محاسبه کنید.

حل: ابتدا نقطهٔ بحرانی و نقاط تقاطع رادریافت می‌نماییم:

$$y^2 - x - 5 = 0 \;,\quad -x = 5 - y^2 \;\Rightarrow\; x = -5 + y^2$$
$$x' = 2y = 0 \;\Rightarrow\; y = 0$$
$$y = 0 \;,\quad x = -5 + y^2 \;,\quad x = -5 + 0 \Rightarrow x = -5$$
$$x = 0 \;,\quad x = -5 + y^2 \;,\quad -5 + y^2 = 0 \Rightarrow y^2 = 5$$
$$y = \pm\sqrt{5} \;\Rightarrow\; y_1 = \sqrt{5} \;,\quad y_2 = -\sqrt{5}$$

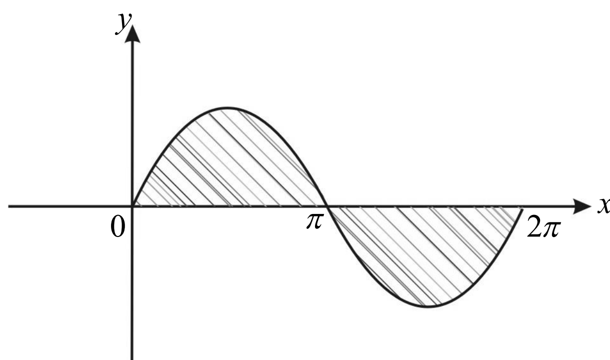


نقاط تقاطع گراف با محور y $(0,\sqrt{5}),(0,-\sqrt{5})$ است و همچنان در شکل دیده می‌شود که معادلهٔ $x = -5 + y^2$ در انتروال $[\sqrt{5}, -\sqrt{5}]$ نظر به محور y هر دو نقطهٔ آن متناظر اند؛ پس مساحت نصف سرحدات انتیگرال را دریافت و آنرا ضرب 2 می کنیم و علامه را منفی می گیریم، چون به طرف منفی محور x است:

$$A = \int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} (-5 + y^2)dy = -2\int_0^{\sqrt{5}} (-5 + y^2)dy = -2\left[-5y + \frac{y^3}{3}\right]_0^{\sqrt{5}} = -2\left[-5\sqrt{5} + \frac{(\sqrt{5})^3}{3} - 0\right]$$
$$= -2(-5\sqrt{5} + \frac{(2.236)^3}{3}) = -2(-5(2.236) + \frac{11.179}{3}) = -2(-11.18 + 3.726)$$
$$= -2(-7.454) = 14.908$$

2- مساحت سطحی را که بین منحنی $y=\sin x$ و محور x در انتروال $[0,2\pi]$ محصور شده دریافت کنید.

حل: ابتدا تابع $y=\sin x$ را در بین $[0,2\pi]$ در نظر گرفته وگراف آنرا ترسیم می‌کنیم:



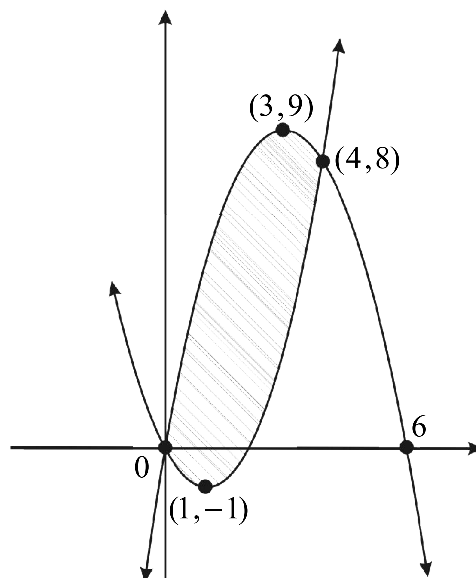
چون در شکل دو ناحیه وجود دارد ناحیه اول؛ یعنی $[0,\pi]$ و ناحیه دوم؛ یعنی $[\pi,2\pi]$ پس داریم که:

$$A=\int_0^{2\pi}\sin x dx=\int_0^{\pi}\sin x dx-\int_{\pi}^{2\pi}\sin x dx=-[\cos x]_0^{\pi}+[\cos x]_{\pi}^{2\pi}$$
$$=-[\cos\pi-\cos 0]+[\cos 2\pi-\cos\pi]=-[\cos 180^\circ-1]+[\cos 360^\circ-\cos 180^\circ]$$
$$=-[-1-1]+[1-(-1)]=-(-2)+2$$
$$=2+2=4$$

و یا: $A=2\int_0^{\pi}\sin x dx=-2\cos x\Big|_0^{\pi}=-2[\cos\pi-\cos 0]=-2(-1-1)=4$

3- مساحت سطح محصور شده توسط منحنی های $y=x^2-2x$ و $y=6x-x^2$ را حساب کنید.

حل:



$$y=x^2-2x \quad , \quad y=6x-x^2$$
$$\left.\begin{aligned}f(x)=x^2-2x\\ g(x)=6x-x^2\end{aligned}\right\}\quad f(x)=g(x)$$
$$x^2-2x=6x-x^2$$
$$x^2-2x-6x+x^2=0$$
$$2x^2-8x=0$$
$$2x(x-4)=0$$
$$2x=0 \quad\Rightarrow\quad x_1=0\quad\Rightarrow\quad y_1=0$$
$$x-4=0\quad\Rightarrow\quad x_2=4\quad\Rightarrow\quad y_2=8$$

پس نقاط تقاطع هر دو گراف $(0,0)$ و $(4,8)$ است.

تقاطع با محور x: $y=0 \Rightarrow x(x-2)=0 \Rightarrow$

$x_1 = 0$

$x_2 = 2$

$y' = 2x - 2$

$2x - 2 = 0$

$y = 6x - x^2 \qquad \Rightarrow \boxed{x = 1}$ نقطهٔ اصغری $(1, -1)$

$x(6 - x) = 0$ تقاطع با محور x:

$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 6 \end{cases} \Rightarrow$ نقاط تقاطع با محور x: $(6,0)$ و $(0,0)$

$x_1 = 0$

$x_2 = 6$

$y' = 6 - 2x \Rightarrow 6 - 2x = 0$

$-2x = 6 \Rightarrow x = 3$ نقطهٔ اعظمی: $(3,9)$

نقاط تقاطع هر دو منحنی $(0,0)$ و $(4,8)$ بوده و در شکل گراف تابع $g(x)$ فوق گراف تابع $f(x)$ است؛ پس داریم که:

$$A = \int_a^b [g(x) - f(x)]dx = \int_a^b g(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx = \int_0^4 (6x - x^2 - x^2 + 2x)\,dx$$

$$= \int_0^4 (-2x^2 + 8x)\,dx = \left[-2\frac{x^3}{3} + 8\frac{x^2}{2}\right]_0^4 = (-2 \cdot \frac{4^3}{3} + 8\frac{4^2}{2} + 0) = -2\frac{64}{3} + 8\frac{16}{2}$$

$$= -\frac{128}{3} + 64 = \frac{-128 + 192}{3} = \frac{64}{3} = 21.\overline{3}$$

4– مساحت سطح محصور شده توسط منحنی با معادلهٔ $y = -x^2 + 4x - 3$ و محور x را در یابید.

حل: نقطه بحرانی $(2,0)$

$y' = -2x + 4 = 0 \Rightarrow -2x = -4 \;,\; x = 2 \Rightarrow (2,1)$ نقطهٔ اعظمی

$y = 0: \; -x^2 + 4x - 3 = 0$

$(-x + 1)(x - 3) = 0$

$-x + 1 = 0 \Rightarrow x_1 = 1$

$x - 3 = 0 \Rightarrow x_2 = 3$

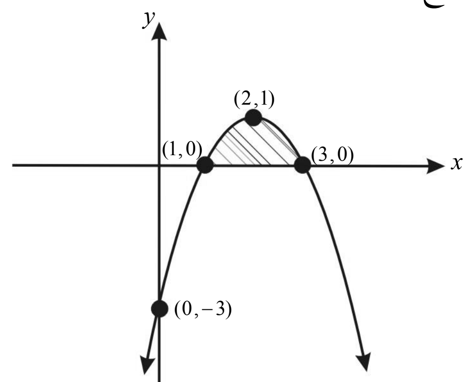
نقاط تقاطع با محور x: $(3,0)$, $(1,0)$

$$A = \int_1^3 (-x^2 + 4x - 3)dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 4\frac{x^2}{2} - 3x\right]_1^3$$

$$= (-\frac{3^3}{3} + 2(3)^2 - 3(3) + \frac{1}{3} - 2 + 3)$$

$$= -\frac{27}{3} + 2(9) - 9 + \frac{1}{3} + 1 = -9 + 18 - 9 + \frac{1+3}{3}$$

$$= -18 + 18 + \frac{4}{3} = \frac{4}{3}$$



5– مساحت سطح محصور شده توسط منحنی‌های $y = x^3 - 6x^2 + 8x$ و $y = x^2 - 4x$ را حساب کنید.

حل:

$$\begin{cases} y = x^3 - 6x^2 + 8x \\ y = x^2 - 4x \end{cases}$$

$$\left.\begin{matrix} f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x \\ g(x) = x^2 - 4x \end{matrix}\right\} \; f(x) = g(x)$$

$$x^3 - 6x^2 + 8x = x^2 - 4x$$
$$x^3 - 6x^2 + 8x - x^2 + 4x = 0$$
$$x^3 - 7x^2 + 12x = 0$$
$$x(x^2 - 7x + 12) = 0$$
$$x_1 = 0 \;,\; x^2 - 7x + 12 = 0 \;,\; (x-3)(x-4) = 0 \;\Rightarrow\; x_2 = 3 \;,\; x_3 = 4$$

نقاط تقاطع منحنی ها $(0,0)$, $(3,-3)$ و $(4,0)$ است.

تقاطع منحنی $y = x^3 - 6x^2 + 8x$ با محورها:

تقاطع با محور y: $(0,0)$

تقاطع با محور x:

$$x(x^2 - 6x + 8) = 0$$
$$x(x-2)(x-4) = 0$$
$$x_1 = 0 \;,\; y_1 = 0 \;\Rightarrow\; (0,0)$$
$$x_2 = 2 \;,\; y_2 = 0 \;\Rightarrow\; (2,0)$$
$$x_3 = 4 \;,\; y_3 = 0 \;\Rightarrow\; (4,0)$$

نقاط اعظمی، اصغری و انعطاف را از روی مشتق دریافت می‌نماییم:

نقطهٔ اعظمی $(0.8, 3.2)$ ، اصغری $(3, -2)$ و انعطاف $(2,0)$

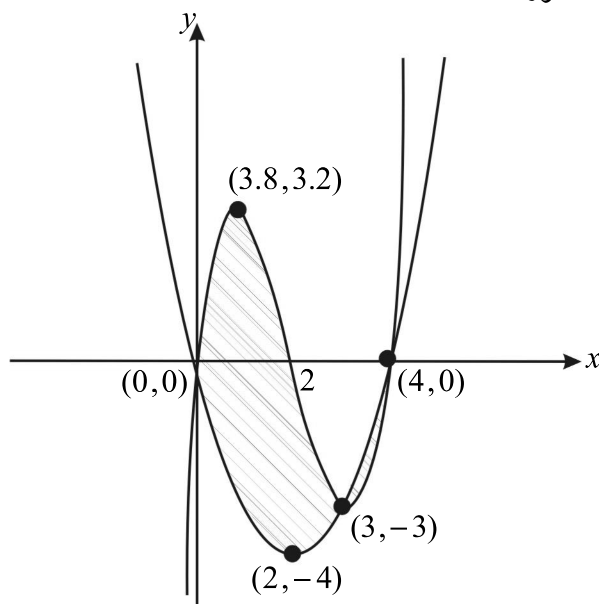
تقاطع منحنی $y = x^2 - 4x$ با محورها:

تقاطع با محور y:

$$x = 0 \;\Rightarrow\; y = 0 \;\Rightarrow\; (0,0)$$

تقاطع با محور x:

$$y=0$$
$$x^2-4x=0 \quad \Rightarrow (x-4x)=0$$
$$x_1=0\ ,\quad y_1=0 \ \Rightarrow (0,0)$$
$$x_2=4\ ,\quad y_2=0 \ \Rightarrow (4,0)$$
$$y'=2x-4$$
$$2x-4=0$$
$x=2\ ,\quad y=-4 \ \Rightarrow\ (2,-4)$ نقطهٔ اصغری



در شکل به مشاهده میرسد که نقاط تقاطع هر دو منحنی $(0,0),(3,0)$ و $(4,0)$ بوده و هم گراف تابع $f(x)$ در انتروال $(0,3)$ فوق گراف تابع $g(x)$ است؛ پس داریم که:

$$A=\int_0^3\left[f(x)-g(x)\right]dx=\int_0^3 f(x)\,dx-\int_0^3 g(x)\,dx$$

و هم گراف تابع $g(x)$ در انتروال $(3,4)$ فوق گراف تابع $f(x)$ قرار دارد؛ پس داریم که:

$$A=\int_3^4\left[g(x)-f(x)\right]dx=\int_3^4 g(x)\,dx-\int_3^4 f(x)\,dx$$

$$A=\int_0^3\left[x^3-6x^2+8x-x^2+4x\right]dx+\int_3^4\left[x^2-4x-x^3+6x^2-8x\right]dx$$

$$=\int_0^3\left[x^3-7x^2+12x\right]dx+\int_3^4\left[-x^3+7x^2-12x\right]dx$$

$$=\int_0^3 x^3dx-\int_0^3 7x^2dx+\int_0^3 12xdx+\int_3^4 -x^3dx+\int_3^4 7x^2dx-\int_3^4 12xdx$$

$$=\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^3-7\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^3+12\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^3-\left[\frac{x^4}{4}\right]_3^4+7\left[\frac{x^3}{3}\right]_3^4-12\left[\frac{x^2}{2}\right]_3^4$$

$$=\frac{3^4}{4}-7\left[\frac{3^3}{3}\right]+6\left[3^2\right]-\left[\frac{256}{4}-\frac{81}{4}\right]+7\left[\frac{64}{3}-\frac{27}{3}\right]-12\left[\frac{16}{2}-\frac{9}{2}\right]$$

$$=\frac{81}{4}-\frac{189}{3}+54-\frac{175}{4}+7\left[\frac{37}{3}\right]-12\left[\frac{7}{2}\right]=\frac{81}{4}-63+54-\frac{175}{4}+\frac{259}{3}-42$$

$$=\frac{81}{4}-9-\frac{175}{4}+\frac{259}{3}-42=\frac{81-36}{4}-\frac{175}{4}+\frac{259-126}{3}=\frac{45}{4}-\frac{175}{4}+\frac{133}{3}$$

$$=\frac{45-175}{4}+\frac{133}{3}=\frac{-130}{4}+\frac{133}{3}=\frac{-390+532}{12}=\frac{142}{12}=\frac{71}{6}=11.8\overline{3}$$

6- حجـم جـسمی کـه از دوران سـطح محـصور شـده توسـط منحنـی تـابع $y=\sin x-\cos x$ در انتـروال $x=0$ و $x=\frac{\pi}{2}$ حول محور x به وجود می آید، حساب کنید.

حل:

$$V=\int_a^b \pi r^2 dx=\int_a^b \pi y^2 dx$$

$$V=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \pi(\sin x-\cos x)^2 dx=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x-\cos x)^2 dx$$

$$=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\sin^2 x-2\sin x\cos x+\cos^2 x\right]dx$$

$$=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[-2\sin x\cos x+\underbrace{\sin^2 x+\cos^2 x}_{1}\right]dx$$

$$=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[1-2\sin x\cos x\right]dx=\pi\left[x-\sin^2 x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\pi\left[\frac{\pi}{2}-\sin^2\frac{\pi}{2}-0+\sin^2 0\right]=\pi\left[\frac{\pi}{2}-\sin^2\frac{\pi}{2}\right]$$

$$=\pi[\frac{\pi}{2}-\sin^2 90^\circ]=\pi\left[\frac{\pi}{2}-1\right]=\frac{\pi^2}{2}-\pi$$

7- حجم جسم را که از دوران منحنی $y=\frac{1}{4}x^2+2$ و محور x در انتروال $[0,4]$ به وجود می آید دریابید.

حل:

$$V=\int_a^b \pi r^2 dx=\int_a^b \pi y^2 dx=\int_0^4 \pi(\frac{1}{4}x^2+2)^2 dx=\int_0^4 \pi(\frac{1}{16}x^4+2\cdot\frac{1}{4}x^2\cdot 2+4)dx$$

$$=\pi(\int_0^4\frac{1}{16}x^4dx+\int_0^4 x^2dx+\int_0^4 4dx)=\pi(\left[\frac{x^5}{80}\right]_0^4+\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^4+\left[4x\right]_0^4)$$

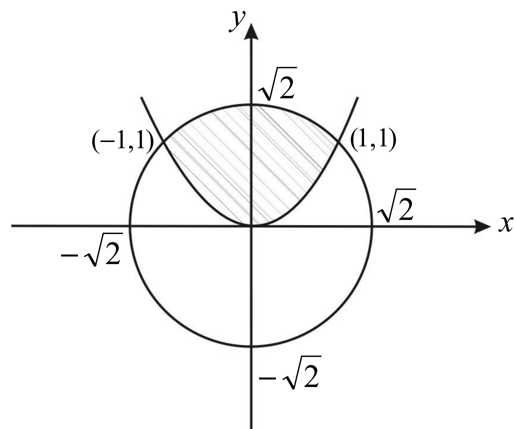
$$=\pi(\frac{4^5}{80}+\frac{64}{3}+16)=\pi(\frac{1024}{80}+\frac{64}{3}+16)$$

$$=\pi(\frac{64}{5}+\frac{64}{3}+16)=\pi(\frac{192+320}{15}+16)$$

$$=\pi(\frac{512}{15}+16)=\pi(\frac{512+240}{15})=\pi(\frac{752}{15})=\frac{752}{15}\pi$$

8- حجم جسمی که از دوران سطح محصور شده توسط منحنی تابع $y=x^2$ و دایرهٔ $x^2+y^2=2$ حول محور x به وجود می آید، حساب کنید.

حل: چون $y=x^2$ است این قیمت را در رابطه $x^2+y^2=2$ وضع می‌کنیم؛ بناءً داریم که:



$$y=x^2$$
$$x^2+y^2=2$$
$$y+y^2=2 \Rightarrow \quad y^2+y-2=0$$
$$(y+2)(y-1)=0$$
$$y+2=0 \Rightarrow \quad y_1=-2$$
$$y-1=0 \Rightarrow \quad y_2=1$$
$$y=1 \quad , \quad y=x^2 \Rightarrow \quad x^2=1$$
$$x=\pm 1 \Rightarrow \quad x_1=1 \quad , \quad x_2=-1$$

$y_1=x^2$ نقاط تقاطع $(-1,1)$, $(1,1)$

تابع مقابل را نیز از جنس x دریافت می‌کنیم:

$$x^2+y^2=2$$
$$y^2=2-x^2 \Rightarrow \quad y_2=\sqrt{2-x^2}$$

چون گراف تابع $x^2+y^2=2$ فوق گراف تابع $y=x^2$ است؛ پس داریم که:

$$V=\int_a^b \pi(y_2^2-y_1^2)\,dx=\pi\int_{-1}^{1}\left[(\sqrt{2-x^2})^2-x^4\right]dx=\pi\int_{-1}^{1}\left[2-x^2-x^4\right]dx$$
$$=\pi\left[2x-\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5}\right]_{-1}^{1}=\pi\left[(2-\frac{1}{3}-\frac{1}{5})-(-2+\frac{1}{3}+\frac{1}{5})\right]=\pi(2-\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+2-\frac{1}{3}-\frac{1}{5}))$$
$$=\pi(4-\frac{2}{3}-\frac{2}{5})=\pi(4-\frac{10+6}{15})=\pi(4-\frac{16}{15})=\pi(\frac{60-16}{15})=\pi(\frac{44}{15})=\frac{44}{15}\pi$$

9- حجم جسم را که از دوران خط $y=\frac{1}{2}x+1$ و محور x در انتروال $[2,6]$ به دست می آید محاسبه کنید.

حل:

$$V=\int_a^b \pi r^2 dx=\int_a^b \pi y^2 dx=\int_2^6 \pi(\frac{1}{2}x+1)^2 dx=\pi\int_2^6(\frac{1}{4}x^2+x+1)dx$$
$$=\pi\left[\frac{x^3}{12}+\frac{x^2}{2}+x\right]_2^6=\pi(\frac{6^3}{12}+\frac{6^2}{2}+6-\frac{2^3}{12}-\frac{2^2}{2}-2)$$
$$=\pi(\frac{216}{12}+\frac{36}{2}+6-\frac{8}{12}-\frac{4}{2}-2)=\pi(\frac{216}{12}+\frac{36}{2}+4-\frac{2}{3}-2)$$
$$=\pi(\frac{216}{12}+\frac{36}{2}-\frac{2}{3}+2)=\pi(\frac{1296+1296-48+144}{72})=\pi(\frac{2736-48}{72})$$
$$=\pi(\frac{2688}{72})=\pi(\frac{112}{3})=\frac{112}{3}\pi$$

10- طول قوس منحنی تابع $y=-x+4$ را در انتروال $-2\le x\le 2$ محاسبه کنید.

حل:

$$f(x)=-x+4 \quad , \quad f'(x)=-1$$

$$L=\int_a^b\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx=\int_{-2}^{2}\sqrt{1+(-1)^2}\,dx=\int_{-2}^{2}\sqrt{1+1}dx=\int_{-2}^{2}\sqrt{2}dx=\left[\sqrt{2}x\right]_{-2}^{2}$$

$$L=(\sqrt{2}\cdot 2-\sqrt{2}(-2))=2\sqrt{2}+2\sqrt{2}=4\sqrt{2}$$

$$L=4\sqrt{2}=4\cdot 1.4=5.6$$

11- طول قوس تابع $y=\frac{4}{3}x+\frac{4}{3}$ را در انتروال $2\le x\le 5$ حساب کنید.

حل:

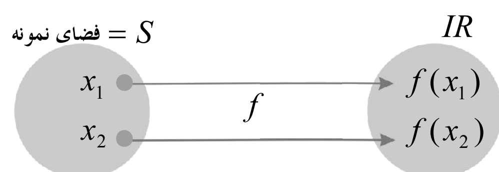
$$f(x)=\frac{4}{3}x+\frac{4}{3} \quad , \quad f'(x)=\frac{4}{3}$$

$$L=\int_2^5\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx=\int_2^5\sqrt{1+(\frac{4}{3})^2}\,dx=\int_2^5\sqrt{1+\frac{16}{9}}dx=\int_2^5\sqrt{\frac{9+16}{9}}dx=\int_2^5\sqrt{\frac{25}{9}}dx$$

$$L=\int_2^5\frac{5}{3}dx=\left[\frac{5}{3}x\right]_2^5=\frac{5}{3}[5-2]=\frac{5}{3}[3]=\frac{15}{3}=5$$

$$L=5$$

فصل هفتم



عنوان درس: توزیع تابع احتمال

صفحهٔ کتاب (225-228)

وقت تدریس(1 ساعت درسی)

اهداف آموزشی **- دانشی** **- مهارتی** **- ذهنیتی**	• شاگردان مفهوم توزیع احتمال متحول تصادفی را بدانند. • شاگردان تابع احتمال مجزا متحول تصادفی را به دست آورده بتوانند. • شاگردان فورمول تابع احتمال تجمعی متحول تصادفی را تعریف کرده بتوانند. • شاگردان از آموختن توزیع تابع احتمال احساس خوشی نمایند.
روش های تدریس	سؤال و جواب، کارهای گروهی و انفرادی
مواد ممد درسی	موادی که برای تدریس بهتر لازم می‌بینند.
توضیح ورودی **(5) دقیقه**	در قدم اول کارهای مقدماتی تدریس را که بعد از داخل شدن به صنف ضروری است انجام دهید؛ بعداً به توضیح بخش ورودی اقدام کنید، برای این کار توابع بخش ورودی را روی تخته نوشته و از شاگردان بپرسید: • در شکل چی می‌بینید؟ • از شاگردان در مورد متحول تصادفی، تجربه و فضای نمونه بپرسید. کوشش نمایید تا جوابات درست را از شاگردان به دست آرید، برعلاوهٔ آن میتوانید در مورد بخش ورودی طوری ذیل توضیحات دهید: شما در شکل تابع f را مشاهده می‌کنید که ساحهٔ تعریف آن S (فضای‌نمونه) و ساحهٔ قیمت‌های آن IR (اعداد حقیقی) می‌باشد. در مورد متحول تصادفی دانستی‌های ضروری در بخش معلومات اضافی درس موجود می‌باشد با استفاده از آن بخش ورودی درس را توضیح دهید و معلومات در مورد فضای نمونه و تجربه در فصل احتمالات نیز در این بخش موجود میباشد.

فعالیت جریان درس (28) دقیقه

شاگردان را به گروه‌های مناسب تقسیم نموده و به آنها وظیفه دهید تا فعالیت صفحهٔ 225 کتاب درسی را انجام دهند به یاد داشته باشید در وقت اجرای فعالیت از گروه‌ها نظارت کنید تا تمام اعضای گروه در اجرای فعالیت سهم بگیرند. به شاگردان واضح سازید که هدف این فعالیت شناخت متحول تصادفی، توزیع متحول تصادفی، اوسط متحول تصادفی، واریانس متحول تصادفی و انحراف معیاری متحول تصادفی می‌باشد.

در ختم فعالیت نمایندهٔ یک گروه را بخواهید تا کار گروهی خویش را به دیگران توضیح دهد، هرگاه در توضیح کدام اشتباه موجود بود تصحیح کنید، بعداً نتایج فعالیت را به سهم فعال شاگردان به شکل سؤال و جواب واضح سازید. شما میتوانید نتایج فعالیت را بااستفاده از معلومات اضافی درس توضیح دهید. بعداً مثال اول درس را روی تخته نوشته و با سهم فعال شاگردان حل کنید.

تحکیم درس (7) دقیقه

برای تحکیم درس مثال که ذیلاً داده شده است روی تخته نوشته و به شاگردان وظیفه دهید تا مثال را در کتابچه‌هایشان حل نمایند، همزمان از یک شاگرد داوطلب بخواهید تا مثال مذکور را روی تخته حل کند. بعداً اشتباهات روی تخته را توسط یک شاگرد دیگر اصلاح نموده از شاگردان بخواهید تا طریقهٔ حل خود را با حل سؤال روی تخته مقایسه نمایند، مثال به شکل ذیل است:

مثال اوسط، انحراف معیاری، وریانس و احتمال تجمعی توزیع ذیل را به دست آرید:

x	0	1	2	3
$p(x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

اوسط $= M_x = \frac{12}{8}$, وریانس $= V(x) = \frac{2}{3}$, $S_x = \sqrt{\frac{2}{3}}$, $F(x) = 1$

ارزیابی ختم درس(5) دقیقه

برای اینکه مطمئن شوید که آیا شاگردان درس جدید را فراگرفته اند یا خیر؟ سؤالات ذیل را از شاگردان بپرسید و کوشش نمایید تا جوابات درست را به دست آرید:

1. متحول تصادفی را تعریف کنید.
2. توزیع متحول تصادفی را تعریف کنید.
3. فورمول‌های اوسط، وریانس، انحراف معیاری و تابع احتمال تجمعی و تابع احتمال مجزا متحول تصادفی را بنویسید.

معلومات اضافی

متحول تصادفی(*Random variables*): متحولی که قیمت آن توسط نتایج تجربهٔ تصادفی تعیین می‌گردد به نام متحول تصادفی یاد می‌گردد. ما متحول تصادفی را توسط حروف بزرگ Z, Y, X نشان میدهیم و قیمت‌های متحول تصادفی را توسط حروف کوچک انگلیسی z, y, x نشان میدهیم؛ مثلاً: هرگاه یک سکه را دو دفعه پرتاب کنیم، پس فضای نمونه تجربه طوری ذیل است:

$$S = \{HH, HT, TH, TT\}$$

هرگاه متحول تصادفی X تعداد شیرها را در دو دفعه پرتاب سکه نشان دهد در جدول ذیل دیده می‌شود که هر عنصر فضای نمونه یک عدد را به متحول تصادفی X ربط میدهد.

عناصر فضای نمونه	HH	HT	TH	TT
X	2	1	1	0

متحول تصادفی گسسته و پیوسته (*Discrete and Continues Random variable*): متحول تـصادفی کـه در ترادف اعداد یک عدد را به خود اختیار میکند بـه نـام متحـول تـصادفی گسـسته(*Discrete random variable*) یـاد می‌شود.

مثال‌های متحول تصادفی گسسته(تعداد کتب در یک الماری، تعداد حـوادث ترافیکـی در یـک سـرک، سرشـماری و غیره می‌باشد. یک متحول تصادفی گسسته عموماً اعداد ... $0,1,2,$ را به خود اختیار میکند.

متحول تصادفی پیوسته(*Continues Random Variable*) متحول که در انتـروال (a,b) یـک عـدد حقیقـی را به خود اختیار کند به نام متحول تصادفی پیوسته(*Continues Random Variable*) یاد میشود؛ مثلاً: فاصـلهٔ کـه یـک مـوتر در یک ساعت طی میکند متحول تصادفی پیوسته است. متحول تصادفی عموماً قیمت‌های؛ ماننـد: وزن، فاصـله، درجهٔ حرارت، ارتفاع و غیره را به خود اختیار میکند.

توزیع احتمال تصادفی گسسته(*Discrete probability Distribution*): هرگاه متحول تصادفی X قیمـت‌هـای $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ را به خود اختیار کند و $p(x_1), p(x_2) \ldots p(x_n)$ احتمال‌های مربوط آن باشد، در این صورت ترتیب قیمت‌های متحول تصادفی X و احتمال‌های مربوطهٔ آن به نام توزیع احتمال متحول تصادفی X یاد می‌شود.

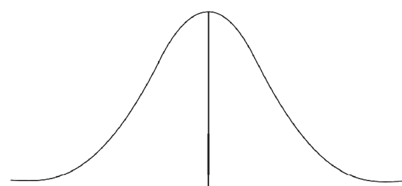
توزیع متحول تصادفی گسسته شکل جدول را دارا می‌باشد و توزیع احتمال دارای دو خاصیت ذیل می‌باشد.

1. احتمال یک حادثه بین صفر(1) است $0 \le P(x_i) \le 1$
2. مجموع احتمال‌ها مساوی به 1 است $\sum P(x_i) = 1$

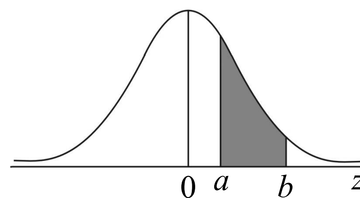
مثال: هرگاه یک سکه پرتاب گردد و عدد 0 آمدن سکه را به روی شیر و عدد 1 آمدن سـکه را بـه روی خـط نـشان دهد؛ پس متحول تصادفی X اعداد 0 و 1 را به خود اختیـار میکنـد، چنـین احتمـال خـط آمـدن $\frac{1}{2}$ و شـیر آمـدن $\frac{1}{2}$ است؛ پس توزیع متحول تصادفی در جدول ذیل نشان داده شده است:

x	0	1
$P(x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

توزیع احتمال متحـول تـصادفی پیوسـته(*Continues Probability Distribution*): متحـول‌هـای پیوسـته متحول‌های اند که تمام قیمت‌های موجود در یک انتروال را اختیار میکنند؛ مـثلاً: بـین $65.5kg$ و $70.50kg$ لایتنـاهی اوزان موجود می‌باشد؛ طوری مثال اگر یک شاگرد به صورت تصادفی انتخاب گردد چانس کم وجـود دارد کـه وزن آن $70kg$ باشد. منحنی توزیع احتمال متحول تصادفی پیوسته به شکل گراف نـشان داده مـی‌شـود و بـه شـکل جـدول نشان داده نمی‌توانیم، منحنی توزیع احتمال طور ذیل است:



مساحت تحت منحنی، توزیع احتمال‌های حوادث را نشان میدهد مساحت تحت منحنی توزیع نورمال، مساوی به 1 است، هرگاه منحنی توزیع نورمال به شکل ذیل باشد.



ساحۀ سایه‌دار احتمال این را نشان میدهد که متحول تصادفی X قیمت را در انتروال a و b اختیار میکند.

اوسط(*Mathematic expectation*): هرگاه متحول تصادفی X قیمت‌های x_1, x_2 ... x_n را به خود اختیار کنند و احتمال‌های مربوط آن $P(x_1), P(x_2)$ ... $P(x_n)$ باشد؛ چون مجموع احتمال‌ها مساوی به 1 است؛ یعنی $\sum_{i=1}^{n} P(x_i) = 1$ اوسط متحول تصادفی X که به $E(x)$ نشان داده می‌شود، طور ذیل است:

$$E(x) = x_1P(x_1) + x_2P(x_2) + \ ... \ + x_nP(x_n)$$

واریانس و انحراف معیاری متحول تصادفی X (***The Variance and Standard Deviation***): واریانس متحول تصادفی x طور ذیل است: $Var(x) = \sum (x_i - \mu)P(x_i)$

انحراف معیاری متحول x: $S_x = \sqrt{Var(x)} = \sqrt{(x_i - \mu)P(x_i)}$

جواب به سؤال های تمرین

فرض کنید که فروشات یک موتر فروشی درطی 100 روز گذشته قرار جدول زیر بوده باشد:

تعداد روز ها	60	30	8	2
تعداد موتر های فروخته شده	0	1	2	3

تابع احتمال متحول تصادفی و تابع احتمال تجمعی متحول تصادفی x را دریافت کنید و با استفاده از تابع احتمال تجمعی بگویید که حد اکثر احتمال 2 موتر در یک روز و حد اقل 2 موتر در یک روز به چه اندازه است؟



فصل هفتم

عنوان درس: آزمایش برنولی و توزیع دو جمله‌یی

صفحهٔ کتاب (229–230)

وقت تدریس(1 ساعت درسی)

اهداف آموزشی **- دانشی** **- مهارتی** **- ذهنیتی**	• شاگردان مفهوم توزیع دوجمله‌یی را بدانند. • شاگردان اوسط و انحراف معیاری توزیع دوجمله‌یی را پیدا کرده بتوانند. • شاگردان بااستفاده از توزیع دوجمله‌یی مثال‌های موجود در کتاب را حل کرده بتوانند. • شاگردان به موضوع درس علاقه‌مند شوند و آن را در زنده‌گی روزمره بکار ببرند.
روش های تدریس	سؤال و جواب، کارهای گروهی و انفرادی
مواد ممد درسی	تاس، مهره‌های سیاه و سفید
توضیح ورودی **(5) دقیقه**	در قدم اول کارهای مقدماتی تدریس راکه بعد از داخل شدن به صنف ضروری است انجام دهید. طوری‌که با استفاده از شکل ورودی که در کتاب درسی موجود است از شاگردان بپرسید: • در شکل چی می‌بینید؟ • آیا گفته میتوانید که در یک سؤال امتحان کانکور احتمال کامیابی و ناکامی چقدر است؟ • هرگاه در امتحان کانکور یک شاگرد از 160 سؤال 100 سؤال را حل کنند احتمال کامیابی شاگرد را از کدام فورمول محاسبه کرده میتوانیم؟ کوشش کنید تا جوابات درست را به دست آرید؛ علاوه بر آن، بخش ورودی را این گونه توضیح دهید که هر سؤال کانکور دارای چهار جواب میباشد و در یک سؤال کانکور $P=\frac{1}{4}$ (احتمال کامیابی) $q=\frac{3}{4}$ (احتمال ناکامی) می‌باشد. اگر یک شاگرد از 160 سؤال 100 سؤال آن را حل کرده باشد احتمال می‌رود که در امتحان کانکور کامیاب شود؛ پس از فورمول توزیع دوجمله‌یی استفاده میکنیم. حل سؤالات ورودی در بخش معلومات اضافی درس موجود است میتوانید با استفاده از آن بخش ورودی را توضیح کنید.

فعالیت جریان درس (28) دقیقه

شاگردان را به گروه‌های مناسب تقسیم نموده و به آنها وظیفه دهید تا فعالیت صفحهٔ 229 کتاب درسی را انجام دهند در جریان فعالیت رهنمایی نمایید که بخش اول فعالیت به شکل عملی اجرا می‌شود؛ یعنی با استفاده از تاس و مهره‌ها به انجام رسانیده می‌شود. در جریان کار گروهی از گروه‌ها نظارت کنید تا تمام اعضای گروه در اجرای فعالیت سهم گیرند.

در ختم فعالیت نمایندۀ یک گروه را بخواهید تا کار گروهی خویش را به دیگران توضیح دهد، هرگاه در وقت توضیح کدام اشتباه بروز کند آن را اصلاح کنید، بعداً نتایج فعالیت را باسهم فعال شاگردان توضیح دهید.
برای توضیح بهتر میتوانید از معلومات اضافی درس استفاده نمایید بعداً مثال اول صفحۀ 230 کتاب درسی را با سهم فعال شاگردان روی تخته حل کنید.

تحکیم درس(7) دقیقه

برای تحکیم درس نکات مهم درس را به شاگردان مختصر توضیح کنید:

1. توزیع دوجمله‌یی
2. اوسط توزیع دوجمله‌یی
3. انحراف معیاری توزیع دوجمله‌یی

ارزیابی ختم درس (5) دقیقه

برای این که مطمئن شوید که آیا شاگردان درس جدید را فراگرفته اند یا خیر؟ سؤالات ذیل را مطرح کنید:

1. تعریف توزیع دوجمله‌یی و فورمول آنرا بنویسید.
2. فورمول اوسط توزیع دوجمله‌یی را بگویید.
3. فورمول انحراف معیاری توزیع دوجمله‌یی را بنویسید.
4. هرگاه یک سکه را چهار بار پرتاب کنید احتمال دو دفعه آمدن روی شیر آن را حساب نمایید،(حل سؤال در معلومات اضافی درس موجود است).

معلومات اضافی برای معلم

احتمال توزیع دوجمله‌یی(*Binomial Probability Distribution*): هرگاه P احتمال کامیابی در یک آزمایش و q احتمال ناکامی در یک آزمایش باشد؛ پس برای به دست آوردن احتمال m کامیابی در n آزمایش، از فورمول ذیل استفاده میکنیم:

$$P(X=x)=P(x)=b(m,n,p)=\binom{n}{m}p^m\cdot q^{n-m}$$

فورمول فوق به نام فورمول توزیع دوجمله‌یی یاد می‌شود. توزیع دوجمله‌یی را توزیع برنولی(*Bernoulli distribution*) هم گویند؛ این دست آورد از *James- Bernoulli* می‌باشد که در قرن 17 انجام داد.

مثال: هرگاه یک سکه چهار دفعه پرتاب شود احتمال اینکه دو دفعه شیر آید چقدر است؟

حل: طوریکه میدانیم در تجربۀ پرتاب یک سکه احتمال آمدن شیر $P=\frac{1}{2}$ و احتمال آمدن خط $q=\frac{1}{2}$، $n=4$ (تعداد پرتاب) و $m=2$ ؛ پس نظر به فورمول داریم که:

$$P(X=2)=\binom{4}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{4-2}=\frac{4!}{2!(4-2)!}\cdot(\frac{1}{2})^2\cdot(\frac{1}{2})^2=\frac{4\cdot3\cdot2\cdot1}{2!\cdot2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{6}{16}=\frac{3}{8}=0.38$$

جواب به سؤال های تمرین

1- در یک قریه 200 فامیل سکونت دارند که هر فامیل دارای 4 طفل می باشند، دریافت کنید که:

a. حداقل یک پسر داشته باشند.

b. تنها دو پسر داشته باشند.

c. یک یا دو دختر داشته باشند.

حل:

$n=$ تعداد اطفال

$P=\frac{1}{2}$ (احتمال کامیابی)

$m=$ تعداد پسر ها یا دخترها

$q=\frac{1}{2}$ (احتمال ناکامی)

$p=$ احتمال داشتن پسرها

$q=$ احتمال داشتن دخترها

a) حد اقل یک پسر داشته باشد.

فورمول داریم :

$$p(m)+p(m+1)+p(m+2)+p(m+3)=\binom{n}{m}p^{m}\quad q^{n-m}+\binom{n}{m+1}p^{m+1}\cdot q^{(n-m-1)}+\ldots$$

$$+\binom{n}{m+3}p^{m+3}\cdot q^{\,n-m-3}$$

$$p(1)+P(2)+p(3)+p(4)=\binom{4}{1}(\frac{1}{2})^{1}\;(\frac{1}{2})^{3}+\binom{4}{2}(\frac{1}{2})^{2}\cdot(\frac{1}{2})^{2}+\binom{4}{3}(\frac{1}{2})^{3}\cdot(\frac{1}{2})^{1}+\binom{4}{4}(\frac{1}{2})\cdot(\frac{1}{2})^{0}$$

$$=\frac{4!}{3!\cdot 1!}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8}+\frac{4!}{2!\cdot 2!}\cdot(\frac{1}{4})\cdot(\frac{1}{4})+\frac{4!}{3!\cdot 1!}\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2}+\frac{4!}{4!\cdot 0!}\cdot\frac{1}{16}\cdot 1$$

$$=\frac{1}{4}+\frac{3}{8}+\frac{1}{4}=\frac{1}{16}=\frac{4+6+4+1}{16}=\frac{15}{16}$$

احتمال این که حداقل یک پسر داشته باشد $\frac{15}{16}$

میتوانیم این احتمال را از یک روش دیگری نیز به دست آوریم: $1-q^{n}=1-\frac{1}{16}=\frac{15}{16}$

احتمال اینکه هیچ پسر نداشته باشد. $(q)^{n}=(\frac{1}{2})^{4}=\frac{1}{16}$

b) دو پسر داشته باشد.

$$p(\text{پسر } 2)=\binom{4}{2}(\frac{1}{2})^{2}\cdot(\frac{1}{2})^{2}=\frac{4!}{2!\cdot 2!}\cdot(\frac{1}{4})(\frac{1}{4})=\frac{3}{8}$$

c) احتمال اینکه دو دختر داشته باشد.

$$p(\text{دختر } 2)=\binom{4}{2}(\frac{1}{2})^{2}\cdot(\frac{1}{2})^{4-2}=\binom{4}{2}(\frac{1}{2})^{2}\cdot(\frac{1}{2})^{2}=\frac{4!}{2!\cdot 2!}(\frac{1}{4})(\frac{1}{4})=\frac{3}{8}$$

$$1)\ b(x,n,p)=\binom{x}{n}p^x q^{n-x}$$

$$2)\ \lim_{n\to\infty} b(x,n,p)=\frac{\lambda^x\cdot e^{-\lambda}}{x!}$$

$$3)\ P(x,\lambda)=\frac{\lambda^x\cdot e^{-\lambda}}{x!}$$

فصل هفتم

عنوان درس: توزیع احتمال پواسن

صفحهٔ کتاب (231-234)

وقت تدریس(1 ساعت درسی)

اهداف آموزشی **- دانشی** **- مهارتی** **- ذهنیتی**	• شاگردان مفهوم توزیع احتمال پواسن را بدانند. • شاگردان فورمول توزیع دوجمله‌یی و فورمول توزیع پواسن را از هم دیگر تفکیک کرده بتوانند. • شاگردان با مثال‌های درس را احساس خوشی نمایند.
روش های تدریس	سؤال و جواب، کارهای گروهی و انفرادی
مواد ممد درسی	موادی که برای تدریس بهتر لازم میدانید.
توضیح ورودی **(5) دقیقه**	کارهای مقدماتی تدریس را که بعد از داخل شدن به صنف ضروری است انجام دهید، بعداًورودی ذیل را در نظر بگیرید: $1)\ b(x,n,p)=\binom{n}{x}p^x\cdot q^{n-x}$ $2)\ \lim_{n\to\infty, p\to 0} b(x,n,p)=\frac{\lambda^x\cdot e^{-\lambda}}{x!}$ $3)\ P(x,\lambda)=\frac{\lambda^x\cdot e^{-\lambda}}{x!}$ از شاگردان سؤالات ذیل را بپرسید: • آیا میتوانید فورمول توزیع دوجمله‌یی را بنویسید؟ • هرگاه در فورمول توزیع دوجمله‌یی قیمت p کم شود و قیمت n به طرف لایتناهی تقرب کند، آیا میتوانیم از فورمول توزیع احتمال پواسن استفاده کنیم؟ کوشش کنید تا جوابات درست را از شاگردان به دست آرید برعلاوهٔ آن ورودی را طور ذیل توضیح دهید: هرگاه قیمت p از 0.05 کوچکتر و قیمت n از 20 بزرگتر شود. میتوانیم بجای توزیع دوجمله‌یی از توزیع احتمال پواسن استفاده کنیم، به صورت عموم گفته میتوانیم هرگاه در توزیع دوجمله‌یی قیمت n بطرف لایتناهی و p بطرف صفر تقرب کند و $\lambda=np$ شود توزیع دوجمله‌یی مساوی است به: $\lim_{n\to\infty, P\to 0} b(x,n,p)=\frac{\lambda^x\cdot e^{-\lambda}}{x!}$ برای آسانی کار به جای فورمول توزیع دوجمله‌یی از فورمول توزیع احتمال پواسن استفاده میکنیم عموماً هرگاه یک سؤال توسط فورمول توزیع دوجمله‌یی حل شود و یا توسط فورمول پواسن جوابات به دست آمده تقریباً مساوی می‌باشند.

فعالیت جریان درس (28) دقیقه

شاگردان را به گروه‌های مناسب تقسیم نموده و به آنها وظیفه دهید تا فعالیت صفحهٔ 231 کتاب درسی را انجام دهند. در جریان فعالیت رهنمایی نمایید که این فعالیت بااستفاده از درس قبلی((احتمال توزیع دوجمله‌یی)) اجرا می‌شود. در ختم فعالیت نمایندهٔ یک گروه را بخواهید تا کار گروه خویش را به دیگران توضیح دهد.

هرگاه در جریان توضیح فعالیت کدام اشتباه رخ دهد؛ آن را تصحیح کنید، بعداً نتایج فعالیت را با سهم فعال شاگردان به شکل سؤال و جواب توضیح دهید که هر گاه قیمت‌های سطر اول فعالیت $m=2, p=0.1, n=5$ را هم در فورمول توزیع احتمال پواسن و هم در فورمول توزیع دوجمله‌یی وضع کنیم تقریباً جوابات مساوی از به دست می‌آید:

$$P(x=m)=\binom{n}{m}p^m \cdot q^{n-m}$$

$$\left.\begin{array}{l} p=0.1 \\ n=5 \\ m=3 \end{array}\right\} \quad q=1-p=1-0.1=0.99 \quad \Rightarrow \boxed{q=0.9}$$

$$P(x=3)=\binom{5}{3}(0.1)^3 \cdot (0.99)^{5-3}=\frac{5!}{3!\cdot 2!}(0.001)(0.81)=0.0081 \approx 0.01$$

$$\lambda = np = 5 \times 0.1 = 0.5$$

$$P(m,\lambda)=\frac{e^{-\lambda}\cdot \lambda^m}{m!} \quad \Rightarrow P(3,0.5)=\frac{e^{-0.5}\cdot (0.5)^3}{3!}=\frac{(0.61)(0.125)}{6}=0.0126 \approx 0.01$$

بعداً مثال صفحهٔ 232 کتاب درسی را باسهم فعال شاگردان به شکل سؤال و جواب به شاگردان توضیح دهید.

تحکیم درس(7) دقیقه

برای تحکیم درس یادداشت صفحهٔ 233 را که راجع به توزیع احتمال پواسن می‌باشد به شاگردان توضیح نمایید، بعد مثال را روی تخته نوشته از یک شاگرد داوطلب بخواهید تا مثال مذکور را روی تخته حل کند همزمان از شاگردان دیگر بخواهید مثال را در کتابچه‌های شان حل کنند، بعداً اشتباهات تخته را توسط یک شاگرد دیگر اصلاح نموده و از شاگردان بخواهید تا طریقهٔ حل مثال خود را با حل روی تخته مقایسه کنند این کار کمک میکند تا شاگردان به اشتباه خود پی ببرند.

ارزیابی ختم درس(5) دقیقه

برای ارزیابی درس سؤالات ذیل را از شاگردان بپرسید:

1. فورمول توزیع احتمال پواسن را روی تخته بنویسید؟
2. حل سؤالات توسط توزیع احتمال پواسن و یا توزیع دوجمله‌یی برنولی چی تفاوت را در جواب ایجاد میکند؟
3. چی وقت میتوانیم به جای فورمول توزیع دوجمله‌یی از فورمول توزیع احتمال پواسن استفاده کنیم.

یادداشت: معلومات اضافی مربوط به سؤالات فوق در بخش معلومات اضافی درس موجود است میتوانید بااستفاده از آن سؤالات فوق را ارزیابی کنید.

معلومات اضافی برای معلم

توزیــع احتمــال پواســن(*Poisson probability distribution*): توزیــع پواســن توســط دانــشمند بــه نــام (*Simon Denis Poisson*) در سال‌های(1840-1781) نامگذاری گردید.

a) هرگاه در توزیع دوجمله‌یی $b(m,n,p)$ احتمال کامیابی p بسیار کوچک و تعداد آزمایش یعنی n بـسیار بـزرگ شود و $\lambda = np$ مناسب را دارا باشد میتوانیم که به عوض توزیع دوجمله‌یی از توزیع احتمال پواسن استفاده کنیم.

به صورت عموم دانشمندان ریاضی به این نظر اند که توزیع احتمال پواسن زمانی مورد استفاده قـرار بگیـرد کـه قیمـت p کوچکتر از 0.05 و قیمت n بزرگتر از 20 باشد، اگر فرض کنیم قیمت n به طرف لایتناهی و قیمت p به طـرف صفر تقرب کند و $\mu = np$ باشد؛ پس لیمیت توزیع دوجمله‌یی مساوی است به:

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ P\to 0}} b(x,n,p) = \frac{\lambda^x \cdot e^{-\lambda}}{x!}$$

توزیع احتمال پواسن در حالات ذیل به کار برده می‌شود؛ مثلاً:

$$P(x,\lambda) = \frac{\mu^x \cdot e^{-\lambda}}{x!}$$

- تعداد اشتباهات تایپی در یک صفحه.
- در یک شرکت مخابراتی تعداد تیلفون‌های مراجعین در یک ساعت.
- در طول یک سال تعداد مرگ و میر از اثر مرض سرطان.

مثال: 200 نفر برای سـفر ثبـت نـام نمـوده انـد، احتمـال اینکـه یـک مـسافر در وقـت تعیـین شـده حاضـر نـشود 0.01 می‌باشد؛ پس احتمال اینکه 3 نفر حاضر نشود به دست آرید.

حل: هرگاه غیرحاضری مسافرین را کامیابی در نظر گیریم؛ می‌بینیم کـه مربـوط توزیـع دوجملـه‌یـی مـی‌شـود؛ چـون $n = 200$ و $P = 0.01$ است؛ پس p بسیار کوچک و n بسیار بزرگ می‌باشد؛ بنا بر آن مـا از توزیـع احتمـال پواسـن استفاده می‌کنیم:

$$\lambda = np = 200 \times 0.001 = 2$$

$$P(x=3) = P(3,2) = \frac{(2)^3 \cdot e^{-2}}{3!} = \frac{8 \times 0.135}{3 \times 2 \times 1} = 0.1804$$

جواب به سؤال های تمرین

تعداد متوسط مراجعه برای ترمیم یک ماشین چاپ در یک سال 2 بار می باشد. فرض کنید کـه توزیـع احتمـال پواسـن در این مورد صدق نماید.

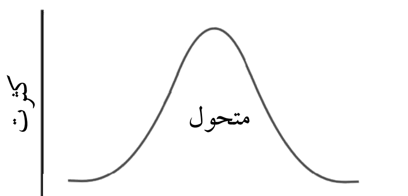
الف: توزیع احتمال تعداد مراجعه برای ترمیم هر ماشین را در سال حساب کنید.

ب: اوسط و انحراف معیار توزیع چقدر است؟

ج: فرض کنید که مصرف هر مراجعه برابر به 100 افغانی باشد. مصرف مورد انتظـار ترمیمـات بـرای هـر ماشـین چقـدر است؟

د: احتمال اینکه مصرف سالانۀ ترمیمات برای یک ماشین از 300 افغانی بیشتر باشد، چقدر است؟

فصل هفتم



عنوان درس: توزیع نورمال

صفحهٔ کتاب (235–238)

وقت تدریس(1 ساعت درسی)

اهداف آموزشی **- دانشی** **- مهارتی** **- ذهنیتی**	• شاگردان باید توزیع نورمال و منحنی نورمال را بشناسند. • شاگردان بتوانند موقعیت اوسط و انحراف معیاری توزیع نورمال را روی منحنی نورمال تعیین کنند. • شاگردان بااستفاده از اوسط و انحراف معیاری، یک منحنی نورمال را رسم کرده بتوانند. • شاگردان از حل مثال‌های مربوط توزیع نورمال را احساس خوشی کنند.
روش های تدریس	سؤال و جواب، کارهای گروهی و انفرادی
مواد ممد درسی	موادی که برای تدریس بهتر لازم می‌دانید.
توضیح ورودی (5) دقیقه	بعد از کارهای مقدماتی تدریس گراف بخش ورودی را روی تخته ترسیم نموده و از شاگردان بپرسید: • در شکل چی می‌بینید؟ • شکل ورودی مشابه به چی است؟ • آیا میتوانید موقعیت اوسط و انحراف معیاری را روی گراف تعیین کنید؟ کوشش کنید تا جوابات درست را به دست آرید علاوه بر آن ورودی را طور ذیل توضیح دهید: منحنی که در شکل داده شده است مشابهت با زنگوله یا پیاله دارد و گراف منحنی توزیع نورمال مربوط به اوسط($\overline{x}$) و انحراف معیاری(δ) می‌باشد؛ طوریکه اوسطه($\overline{x}$ یا μ) موقعیت منحنی را روی محور x تعیین و وسعت یا عرض منحنی مربوط مقدار انحراف معیاری می‌باشد هر قدر که مقدار انحراف معیاری زیاد باشد همان قدر وسعت منحنی بیشتر می‌باشد. یک منحنی نظر به چهار خاصیت نورمال می‌باشد و خاصیت‌ها در معلومات اضافی درس توضیح داده شده است؛ همچنان تعیین موقعیت‌های اوسط و انحراف معیاری نیز ذکر شده است.

فعالیت جریان درس(28) دقیقه

شاگردان را به گروه‌های مناسب تقسیم نموده و به آنها وظیفه دهید تا فعالیت صفحهٔ 235 را انجام دهند. در جریان فعالیت رهنمایی کنید که شاگردان نظر به گراف‌ها، اوسط و انحراف معیاری را نشان دهند و همچنان نظر به انحراف معیاری وسعت یا عرض منحنی را واضح سازند و نظر به اوسط($\overline{x}$) موقعیت منحنی‌ها را روی محور x نشان دهند. در ختم فعالیت نمایندهٔ یکی از گروه‌ها را بخواهید تا کار گروهی خویش را به دیگران توضیح دهند. درصورت اشتباه

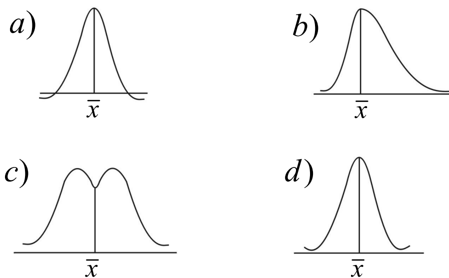
رهنمایی کنید در ختم فعالیت نتایج فعالیت را به شاگردان توضیح دهید.

یادداشت: مثال صفحهٔ 237 کتاب درسی را که مربوط به(درس مساحت تحت منحنی توزیع نورمال و استاندارد کردن آن) می‌شود در درس مساحت تحت منحنی توزیع نورمال و ستاندارد کردن آن توضیح دهید.

تحکیم درس(7) دقیقه

برای تحکیم درس، مثال ذیل را که در کتاب درسی موجود نمی‌باشد و برای وضاحت بیشتر درس خارج از کتاب درسی آورده شده است با سهم فعال شاگردان توضیح دهید.

مثال: منحنی‌های که در اشکال ذیل داده شده است، نورمال نمی‌باشد، دلیل نورمال نبودن منحنی‌ها را واضح سازید.



a)منحنی جزء a نورمال نمی‌باشد؛ زیرا منحنی توزیع نورمال به محور x نزدیک می‌شود؛ اما هیچ وقت از محور x عبور نمی‌کند یعنی محور xرا قطع نمی‌کند.

b) منحنی نورمال باید در دو طرف محور y متناظر باشد؛ اما منحنی شکل b متناظر نمی‌باشد.

c) شکل منحنی نورمال مشابهت با زنگوله دارد و شکل زنگوله دارای یک بلندی می‌باشد؛ اما این شکل دارای دو بلندی می‌باشد.

d) خط منحنی به محور x نزدیک شده می‌رود؛ اما در این شکل نوک خط منحنی از محور x دور شده می‌رود، بنابرآن منحنی نورمال نمی‌باشد.

ارزیابی ختم درس(5) دقیقه

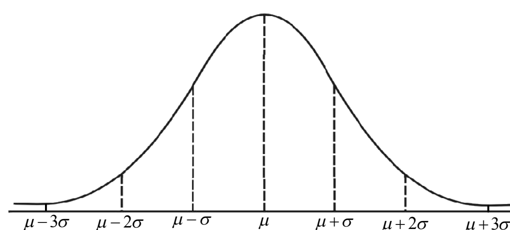
برای اینکه مطمئن شوید که آیا شاگردان درس جدید را فهمیده اند یا خیر؟ درس را با پرسیدن سؤالات ذیل ارزیابی کنید:

1. آیا میتواند در منحنی نورمال موقعیت اوسط($\overline{x}$) و انحراف معیاری(δ) را تعیین کنید؟
2. چهار خاصیت منحنی نورمال را توضیح دهید.

معلومات اضافی

مثال مهم از توزیع متحولین تصادفی پیوسته، عبارت از توزیع نورمال است که با دو پارامتر اساسی μ(اوسط) و δ(انحراف معیاری) ارتباط دارد. گراف توزیع نورمال به نام منحنی نورمال یاد می‌شود.

در منحنی نورمال μ نقطهٔ تناظر گراف و δ خمیده‌گی گراف را نشان میدهد. هر قدر که مقدار δ بزرگ باشد همان قدر عرض منحنی زیاد می‌باشد، شکل منحنی نورمال طوری ذیل است:



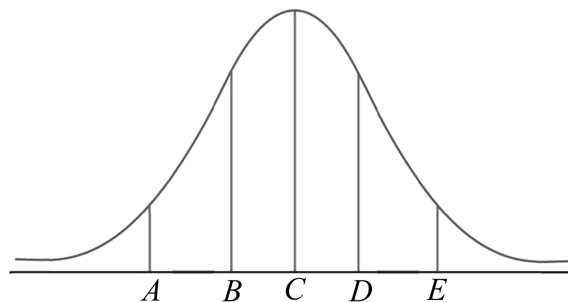
خاصیت‌های مهم منحنی نورمال به شکل ذیل است:

1. منحنی نورمال شکل زنگوله را دارا می‌باشد که بلندترین نقطهٔ آن بالای μ قرار دارد.
2. منحنی نورمال نظر به μ و خط که از μ بالای محور x ترسیم می‌شود متناظر می‌باشد.
3. منحنی به محور x نزدیک می‌شود، اما هیچ وقت محور x را قطع نمی‌کند.

نقطهٔ که حالت صعودی منحنی را به نزولی تبدیل می کند در نقطهٔ $\mu-\delta$ و $\mu+\delta$ موجود است.

جواب به سؤال های تمرین

شکل زیر را در نظر بگیرید. موقعیت نقاط D,C,B,A و E را از جنس اوسط و انحراف معیار ارائه کنید.

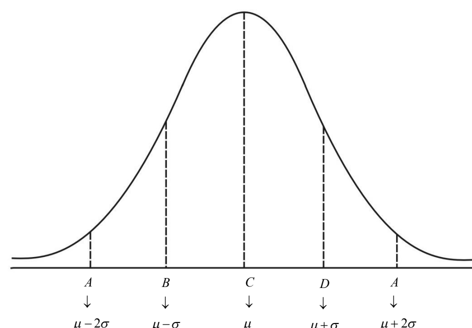


حل: گراف فوق منحنی توزیع نورمال می باشد هرگاه در توزیع نورمال $\mu=0$ و $\delta=1$ شود نورمال ستاندارد می باشد.

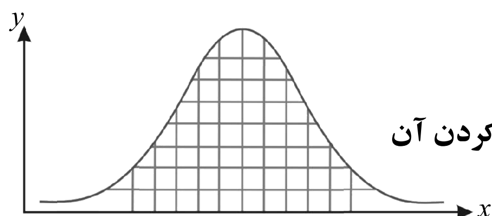
در قدم اول: انتروال‌ها را تشکیل میدهم و با استفاده از μ و انحراف معیاری δ موقعیت های نقـاط D,C,B,A و E را روی گراف تعیین می کنیم یعنی:

$$(\mu-\delta<z<\mu+\delta)=(B\ ,\ D)$$
$$(\mu-2\delta<z<\mu+2\delta)=(A\ ,\ E)$$

هر گاه گراف آن را ترسیم نمایم.



فصل هفتم



عنوان درس: مساحت تحت منحنی توزیع نورمال و ستاندارد کردن آن

صفحهٔ کتاب (239-245)

وقت تدریس(1 ساعت درسی)

اهداف آموزشی **- دانشی** **- مهارتی** **- ذهنیتی**	• شاگردان منحنی توزیع نورمال را بشناسند. • شاگردان بتوانند تا متحول تصادفی پیوسته(X (*Continuous random variable* را از جنسی $Z-Score$ به دست آورند. • شاگردان مساحت تحت منحنی نورمال را به دست آورده بتوانند. • شاگردان از جدول‌های توزیع نورمال که در کتاب درسی موجود است استفاده نموده و احساس خوشی نمایند.
روش های تدریس	سؤال و جواب، کارهای گروهی و انفرادی
مواد ممد درسی	موادی که برای تدریس بهتر لازم می‌دانید.
توضیح ورودی **(5) دقیقه**	بعد از انجام کارهای مقدماتی تدریس شکل منحنی بخش ورودی را روی تخته ترسیم نموده و از شاگردان بپرسید: • شما در شکل چی می‌بینید؟ • توزیع منحنی داده شده توزیع متحول تصادفی پیوسته(*Continuous random variable*) است و یا توزیع متحول تصادفی گسسته(*Discrete random variable*). • مساحت تحت منحنی نورمال در انتروال داده شده چی مفهوم را ارائه می کند؟ کوشش نمایید تا جوابات درست را به دست آورید علاوه بر آن میتوانید به طور ذیل درس را تشریح کنید: ما در شکل منحنی نورمال توزیع نورمال را مشاهده می کنیم که دارای اوسط($\bar{x}$) و انحراف معیاری(S) می‌باشد این توزیع، توزیع متحول تصادفی پیوسته می‌باشد. برای معلومات بیشتر میتوانید از بخش معلومات اضافی درس استفاده کنید.

فعالیت جریان درس: (28) دقیقه

برای انجام فعالیت صفحهٔ 239 کتاب درسی شاگردان را به گروه‌های مناسب تقسیم نموده و به آنها وظیفه دهید تا فعالیت مذکور را انجام دهند، در جریان فعالیت از گروه‌ها نظارت کنید تا تمام اعضای گروه در اجرای فعالیت سهم گیرند، بعداً نمایندهٔ یکی از گروه‌ها را بخواهید تا کار گروهی خویش را به دیگران توضیح دهد و نتایج فعالیت را به شاگردان توضیح دهید طوریکه شاگردان سهم فعال داشته باشند.

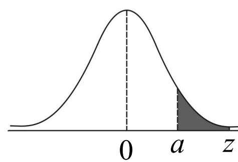
برای توضیح بهتر فعالیت میتوانید از معلومات اضافی درس استفاده کنید بعداً مثال اول صفحهٔ 244 کتاب درسی را باسهم فعال شاگردان توضیح دهید.

تحکیم درس(7) دقیقه

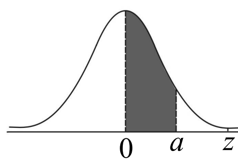
برای تحکیم درس، مثال دوم صفحهٔ 245 کتاب درسی را روی تخته نوشته کنید و از یک شاگرد داوطلب بخواهید تا مثال را روی تخته حل کند، همزمان شاگردان دیگر همین مثال را در کتابچه‌های شان حل کنند، بعداً اشتباهات روی تخته را توسط یک شاگرد دیگر اصلاح نمایید و یا خود معلم صاحب اشتباهات تخته را تصحیح کند، بعداً از شاگردان بخواهید تا طریقهٔ حل مثال کتابچه‌های خویش را با حل مثال روی تخته مقایسه نمایند.

یادداشت

1- به یاد داشته باشید، هرگاه بخواهیم مساحت تحت منحنی را در یک انتروال نامحدود به دست آوریم ما از جدول(1)کتاب درسی استفاده می‌کنیم؛ مثلاً: در صورت $a \le x$



2- هرگاه بخواهیم مساحت تحت منحنی توزیع نورمال را در یک انتروال محدود به دست آوریم میتوانیم از جدول(2) کتاب درسی استفاده کنیم؛ مثلاً: در صورت: $a < x \le a$



ارزیابی ختم درس(5) دقیقه

برای این‌که مطمئن شوید که آیا شاگردان درس جدید را فهمیده اند یا خیر؟ سؤالات ذیل را بطور ارزیابی از شاگردان بپرسید:

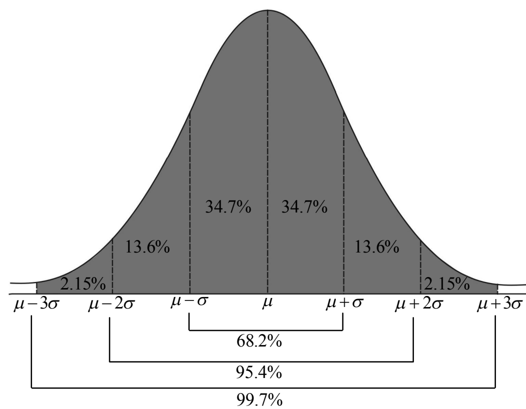
1. بااستفاده از کدام فورمول میتوانیم منحنی توزیع نورمال را به منحنی توزیع نورمال ستاندارد (*Standard normal distribution*) تبدیل کنیم؟
2. در یک توزیع نورمال ستاندارد اوسط($\bar{x}$) و انحراف معیاری(S) کدام قیمت‌ها را به خود اختیار می‌کند؟
3. مفهوم مساحت تحت منحنی نورمال در یک انتروال داده شده چیست؟

برای جواب به سؤالات فوق، میتوانید به معلومات اضافی درس مراجعه کنید.

معلومات اضافی

مجموع مساحت تحت منحنی توزیع نورمال همیشه مساوی به 1 است.

مساحت تحت منحنی نورمال در یک انتروال محدود نشان میدهد که احتمال متحول تصادفی X یک قیمت را در انتروال a و b به خود اختصاص میدهد، هرگاه گراف منحنی ذیل را در نظر گیریم:



در گراف فوق دیده می‌شود که: $(\sigma = S)$

1. به اندازهٔ 68.2% ساحه در انتروال $\mu - S$ و $\mu + S$ موجود است.
2. به اندازهٔ 95.4% ساحه در انتروال $\mu - 2S$ و $\mu + 2S$ موجود است.
3. به اندازهٔ 99.7% ساحه در انتروال $\mu - 3S$ و $\mu + 3S$ موجود است.

منحنی‌های توزیع نورمال از هم دیگر دو تفاوت عمده دارند:

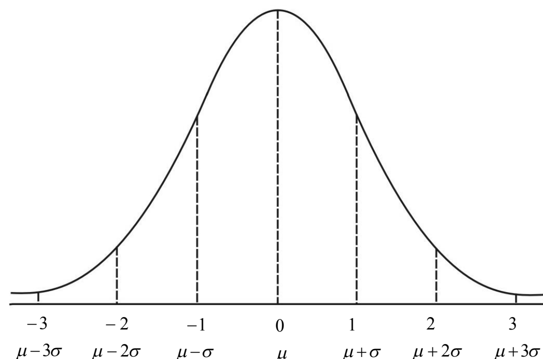
a) نظر به قیمت μ منحنی توزیع نورمال میتواند موقعیت خویش را تغییر دهد.

b) نظر به قیمت S منحنی توزیع نورمال میتواند وسعت خود را زیاد یا کم کنند.

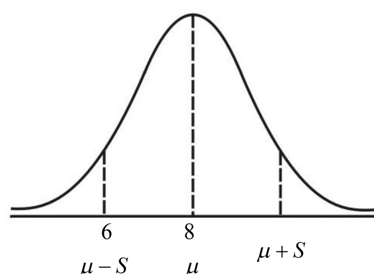
تفاوت‌های فوق می‌تواند در محاسبهٔ مساحت تحت منحنی توزیع نورمال مشکلات را ایجاد کند. برای جلوگیری از مشکلات باید توزیع نورمال، ستاندارد شود. تا بتوانیم مساحت تحت منحنی توزیع نورمال را توسط جدول‌های توزیع نورمال به دست آورده بتوانیم. برای ستاندارد کردن توزیع نورمال(یا احتمال یک حادثه) از $Z - score$ استفاده میکنیم، فورمول $Z - score$ طوری ذیل است:

$$Z = \frac{x - \mu}{S}$$

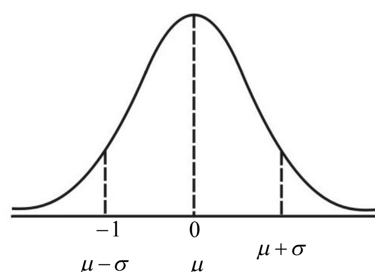
ما قیمت‌های x را از جنس Z به دست می‌آوریم که توزیع نورمال را به نام توزیع نورمال ستاندارد (*Standard normal distribution*) یاد می کنند و اوسط آن $\mu = 0$ و انحراف معیاری آن $S = 1$ می‌باشد که در گراف ذیل نشان داده شده است.



مثال: منحنی توزیع را ترسیم نمایید که $\mu = 8$ و $S = 2$ باشد.



با استفاده از $Z - score$ توزیع نورمال را به توزیع نورمال ستاندارد تبدیل می‌کنیم که شکل ذیل را به خود اختیار می‌کند؛ طوریکه $\mu = 0$ و $S = 1$ می‌باشد.



جواب به سؤال های تمرین

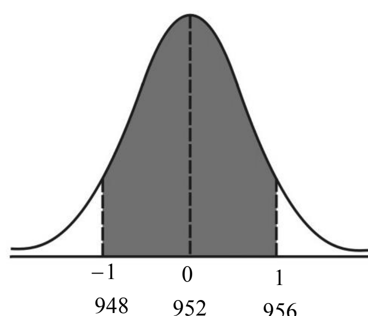
بادرنظرداشت مثال 1 محاسبه کنید که چند فیصد از بوتل ها دارای 948 تا 956 ملی لیتر نوشابه اند.

حل: نظر به مثال اول درس که اوسط توزیع نورمال $\mu = 952$ و انحراف معیاری آن $\delta = 4$ می باشد. ما می خواهیم رابطه $p(a \le x \le b)$ را به $p(z_1 \le z \le z_2)$ تبدیل کنیم.

$a = 948$, $b = 956$

ما x را از جنس z به دست می آوریم:

$$z_1 = \frac{a - \mu}{\delta} = \frac{948 - 952}{4} = -1 \quad , \quad z_2 = \frac{b - \mu}{\delta} = \frac{956 - 952}{4} = 1$$



میدانیم که $p(z_1 \le z \le z_2) = p(z_2) + p(|z_1|) \ldots I$

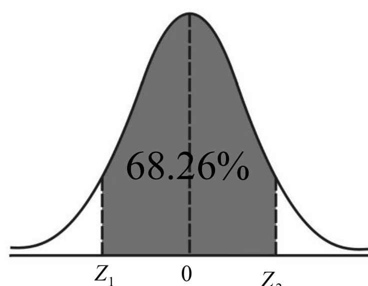
فورمول I در معلومات اضافی درس توضیح شده است.

$$p(-1 \le z \le 1) = p(1) + p(|-1|)$$

هرگاه قیمت های $p(|-1|)$, $p(1)$ را از جدول (2) به دست آورده در فورمول وضع می‌نماییم.

$$p(-1 \le z \le 1) = 0.3413 + 0.3413 = 0.6826$$

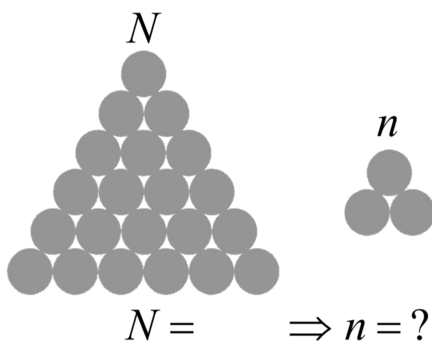
اگر منحنی توزیع نورمال را ترسیم نماییم چنین عمل می کنیم:



پس 68.26 فیصدی بوتل های پر شده دارای 948 ملی لیتر تا 956 ملی لیتر نوشابه می باشد.

یادداشت : چون می خواهیم دریک انتروال محدود مساحت تحت منحنی رابه دست آوریم؛ پس برای پیدا کردن قیمت $p(1)$ از جدول (2) استفاده می کنیم. طوریکه در قدم اول به طرف چپ جدول درستون اول سطر 11 را پیدا می کنیم؛ بعداً طرف راست عدد 1 ستون 0 را پیدا می کنیم که $p(1) = 0.3413$ می باشد.

به یاد داشته باشید که درجدول توزیع نورمال $p(1)$ و $p(-1)$ دارای قیمت مساوی می باشند.



فصل هفتم

عنوان درس: نمونه‌گیری

صفحهٔ کتاب (246-247)

وقت تدریس(1 ساعت درسی)

اهداف آموزشی **- دانشی** **- مهارتی** **- ذهنیتی**	• شاگردان مفهوم نمونه‌گیری را بدانند. • شاگردان مثال‌های مربوط به درس را حل کرده بتوانند. • شاگردان به موضوع درس علاقه‌مند شوند و در زنده‌گی روزمره مثال‌های از نمونه‌گیری آورده و احساس خوشی نمایند.
روش های تدریس	سؤال و جواب، کارهای گروهی و انفرادی
مواد ممد درسی	موادی که برای تدریس بهتر لازم می‌دانید.
توضیح ورودی (5) دقیقه	بعد از انجام کارهای مقدماتی تدریس به توضیح بخش ورودی اقدام کنید. شکل بخش ورودی را روی تخته ترسیم نموده از شاگردان بپرسید: • شما در شکل چی می‌بینید؟ • آیا مجموع مهره‌های N و مجموعهٔ مهره‌های n باهم مشابه اند؟ • (مُشت نمونهٔ خروار است) را چگونه تحلیل می کنید؟ شما در شکل یک مجموعهٔ بزرگ از مهره ها را مشاهده می‌کنید که به N نشان داده شده است و تعداد مهره‌های آن 21 می‌باشد. در پهلوی آن مجموعهٔ کوچک n موجود است که تعداد مهره‌های آن 3 می‌باشد؛ اما این مجموعهٔ کوچک خواص مجموعهٔ بزرگ را در خود دارد. عموماً برای خرید غله از مارکیت چند دانه به طور نمونه دیده می‌شود. همین مقدار کم غله نماینده‌گی از مقدار زیاد غله در مارکیت بزرگ میکند به همین دلیل است که گفته می‌شود(مُشت نمونهٔ خروار است). برای توضیح بهتر میتوانید از بخش معلومات اضافی درس استفاده کنید.

فعالیت جریان درس(28) دقیقه

شاگردان را به گروه‌های مناسب تقسیم نموده و به آنها وظیفه دهید تا فعالیت صفحهٔ 246 کتاب درسی را انجام دهند. در جریان فعالیت به شاگردان رهنمایی نمایید که به چهار نقطهٔ مهم توجه کنند: اول نمونه، دوم اقسام نمونه، سوم روش‌های نمونه‌گیری و چهارم چرا نمونه‌گیری صورت می گیرد. در ختم فعالیت نمایندهٔ یک گروه را بخواهید تا کار گروهی خویش را به دیگران توضیح دهند، اگر در وقت توضیح کدام اشتباه رخ دهد آن را تصحیح کنید و بعداً نتایج فعالیت را باسهم فعال شاگردان توضیح دهید.

برای توضیح بهتر نتیجهٔ فعالیت میتوانید از بخش معلومات اضافی درس استفاده کنید.

تحکیم درس(7) دقیقه

برای تحکیم درس مثال صفحهٔ 247 کتاب درسی را روی تخته نوشته و بعداً باسهم فعال شاگردان مثال را توضیح نمایید.

مثال مذکور در معلومات اضافی درس حل است میتوانید برای توضیح بهتر استفاده نمایید.

ارزیابی ختم درس: (5) دقیقه

برای ارزیابی درس از شاگردان بپرسید:

1. نمونه را تعریف و در مورد یک مثال ارائه کنید.
2. اقسام نمونه را بیان کنید.
3. روش‌های نمونه‌گیری را توضیح نمایید.
4. ویژه‌گی‌های عددی نمونه چیست؟

معلومات اضافی

جامعه(*Society*): مجموعهٔ اشیا و یا افرادی است که میخواهیم در بارهٔ آن موضوع یا موضوعات را بررسی کنیم.

مثال: مجموعهٔ معلمین تمام مکاتب افغانستان موضوع قابل بررسی(سابقهٔ تدریس معلمان)

در مثال فوق(معلمان تمام مکاتب افغانستان جامعه است)

نمونه(Sample): مجموعهٔ کوچکی که برای بررسی یک موضوع از جامعه به صورت تصادفی تعیین می‌شود به نام نمونه یا Sample یاد می‌شود.

مثال: هرگاه بخواهیم اندازهٔ قد متعلمین صنوف دوازدهم یک مکتب را معلوم کنیم، از صنوف 12 یک صنف را انتخاب می‌کنیم و از جمله شاگردان این صنف یک تعداد آن را به صورت تصادفی انتخاب می‌کنیم و قدآنها را اندازه می‌کنیم. همین اندازه نماینده‌گی از قد متعلمین صنف 12 میکند.

نمونه گیری به دو شکل صورت میگیرد:

a) در قدم اول بدون اینکه برای نمونه‌کدام خصوصیاتی تعیین کنیم، از تمام نفوس برای بررسی یک موضوع نمونه را انتخاب می‌کنیم که به نام (*Random sampling*) یا انتخاب نمونهٔ تصادفی یاد می‌شود؛ مثلاً:از مارکیت غله چند دانه غله را برای بررسی به صورت تصادفی انتخاب میکنیم.

b) نمونه‌گیری نوع دوم به نام سهمییوی یا قضاوتی(*Quota sampling*) نمونه‌گیری یاد می‌شود که برای یک مقصد خاص انتخاب می‌کنیم؛ مثلاً: مطالعهٔ 3 نوع خاک و مقایسهٔ نمونهٔ اول خاک(*loam*)، نمونهٔ دوم(*sandy*) و نمونهٔ سوم(*sandy-loam*) یعنی خاک‌های مت، ریگ و خاک مخلوط را باهم مقایسه می‌کنیم در اینجا قصدی سه نوع خاک را اولاً نشانی کرده بعداً انتخاب می‌کنیم.

جواب به سؤال های تمرین

1- اگر حجم جامعه $N = 25$ باشد و بخواهیم نمونۀ تصادفی 5 تایی از آن انتخاب کنیم، تعداد نمونه های به دست آمده چند خواهد بود؟

حل: هرگاه تعداد عناصر جامعه N و تعداد عناصر نمونه n باشد؛ پس تعداد نمونه های را که از یک جامعه تشکیل شده میتواند توسط فورمول به دست می آوریم:

$$\text{تعداد نمونه ها} = \binom{N}{n}$$

$$\text{تعداد نمونه ها} = \binom{25}{5} = \frac{25!}{5!\,(25-5)!} = \frac{25!}{5! \times 20} = 53130$$

پس به تعداد 53130 نمونه ها به دست می آید.

2- نمونه ساده و نمونه تصادفی را با مثال بیان کنید؟

حل: نمونه های تصادفی و ساده نمونه های هستند که هرگاه عناصر نمونه از یک جامعه انتخاب شوند تمام عناصر نمونه چانس مساوی انتخاب شدن را داشته باشند.

مثال: هرگاه صنف دوازدهم را جامعه فرض کنیم. بخواهیم یک نمونۀ 8 نفری را از صنف مربوط برای معلوم کردن اندازه قد شاگردان صنف 12 انتخاب کنیم. هرگاه ما نظر به حروف الفبا که نام کدام شاگرد نظر به حروف الفبا اول ، دوم ، سوم است نمونه 8 نفری را انتخاب کنیم نمونه به دست آمده یک نمونه تصادفی ساده است.

3- فرض کنید از جامعه نمونۀ تصادفی برداشته ایم، چه فکر می کنید که با این نمونه چه باید بکنیم؟

حل: درقدم اول برای نمونۀ انتخاب شده یک متحول تصادفی را تعیین می‌کنیم به اساس متحول تصادفی توزیع احتمال را پیدا می کنیم. به اساس توزیع به دست آمده اوسط نمونه و انحراف معیاری نمونه را تعیین می‌کنیم بعداً به اساس اوسط، انحراف معیاری و واریانس نمونۀ اوسط و واریانس جامعه را تعیین می کنیم.

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = ?$$

فصل هفتم

عنوان درس: توزیع اوسط نمونه

صفحهٔ کتاب (248-251)

وقت تدریس(1 ساعت درسی)

اهداف آموزشی **- دانشی** **- مهارتی** **- ذهنیتی**	• شاگردان مفهوم توزیع اوسط نمونه را بدانند. • شاگردان توزیع اوسط نمونه را تشکیل کرده بتوانند. • شاگردان با کسب دانش و مهارت فوق احساس خوشی کنند.
روش های تدریس	سؤال و جواب، کارهای گروهی و انفرادی
مواد ممد درسی	موادی که برای تدریس بهتر لازم می‌دانید.
توضیح ورودی **(5) دقیقه**	در قدم اول با دخول در صنف کارهای مقدماتی تدریس را که ضروری است انجام دهید بعداً به توضیح بخش ورودی اقدام کنید. فورمول که در بخش ورودی داده شده است روی تخته نوشته از شاگردان بپرسید فورمول قرار ذیل است: $\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = ?$ • فورمول فوق فورمول چیست؟ • در فورمول فوق i, x و n چی را نشان میدهند؟ کوشش نمایید تا جوابات درست را از شاگردان به دست آورید علاوه بر آن میتوانید طور ذیل توضیحات دهید: فورمول فوق فورمول عمومی اوسط می‌باشد در فورمول فوق x معلومات مقداری جمع آوری شده را نشان می‌دهد که ما می‌خواهیم اوسط آن را به دست آوریم. i شمارهٔ هر دیتا را نشان می‌دهد و n تعداد تمام دیتا را نشان میدهد. برای به دست آوردن اوسط جامعه، از جامعه نمونه‌یی را انتخاب می کنیم و اوسط نمونهٔ مذکور را به دست می‌آوریم. بعداً توسط اوسط نمونه، اوسط جامعه را تخمین میکنیم.

فعالیت جریان درس(28) دقیقه

برای انجام فعالیت شاگردان را به گروه‌های مناسب تقسیم نموده و به آنها وظیفه دهید تا فعالیت صفحهٔ 248 کتاب درسی را انجام دهند. در جریان فعالیت از گروه‌ها نظارت کنید تا تمام اعضای گروه در اجرای فعالیت سهیم باشند بعداً به ترتیب نمایندهٔ هر گروه را بخواهید تا فورمول‌های توزیع احتمال جامعه، اوسط جامعه، انحراف معیاری جامعه، انتخاب نمونهٔ دوتایی و اوسط هر نمونه و توزیع اوسط نمونه را توضیح دهند.

هرگاه در وقت توضیح کدام اشتباه بروز کند آن را اصلاح نموده بعداً نتایج فعالیت را باسهم فعال شاگردان توضیح دهید.

تحکیم درس(7) دقیقه

برای تحکیم درس مثال صفحهٔ 249 کتاب درسی را باسهم فعال شاگردان توضیح دهید.

ارزیابی ختم درس: (5) دقیقه

برای اینکه مطمئن شوید آیا شاگردان درس جدید را فرا گرفته اند یا خیر؟ سؤالات ذیل را بپرسید:

1. فورمول اوسط، انحراف معیاری و واریانس جامعه را بگویید.
2. از جامعهٔ اعداد $2,3,4,5$ نمونهٔ دوتایی را انتخاب کنید.
3. اوسط نمونه‌های تشکیل شده، توزیع احتمال اوسط نمونه، انحراف معیاری توزیع احتمال، اوسط و واریانس را به دست آورید؟

کوشش نمایید تا جوابات درست را به دست آورید، علاوه بر آن برای ارزیابی درس از معلومات اضافی استفاده کنید.

معلومات اضافی

هرگاه بخواهیم معاش اوسط افراد یک شهر را محاسبه کنیم، برای این کار یک نمونهٔ تصادفی از افراد شهر انتخاب می کنیم.

اوسط نمونه را محاسبه می کنیم، بعداً توزیع اوسط نمونه را پیدا میکنیم بعداً اوسط ، وریانس و انحراف معیاری توزیع را محاسبه می کنیم؛ بعداً توسط همین اوسط، اوسط جامعه را تخمین می کنیم؛ مانند: صفحهٔ 249 کتاب درسی هرگاه حجم نمونه زیاد شود اوسط نمونه و انحراف معیاری نمونه کم می‌شود. با ازدیاد حجم نمونه مقدار توزیع $\bar{x}$ به اوسط جامعه متمرکز می‌شوند.

جواب به سؤال های تمرین

1- فرض کنید جامعه‌یی متشکل از چهار عدد $6,4,2$ و 8 باشد، در این صورت، توزیع، اوسط و وریانس این جامعه را محاسبه و سپس از این جامعه نمونهٔ تصادفی دوتایی را با جای گزینی انتخاب و توزیع اوسط نمونه؛ یعنی $\bar{x}$ را به دست آرید گراف چند ضلعی کثرت آن را ترسیم و اوسط و وریانس $\bar{x}$ را حساب کنید.

حل: هرگاه جامعه را به حرف S نشان دهیم.

$$S = \{2\ ,\ 4\ ,\ 6\ ,\ 8\}$$

x	2	4	6	8
$f(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

اوسط و واریانس توزیع احتمال جامعه:

$$E(x)=\bar{x}=\sum_{i=1}^{n}x_i f(x_i)=2\cdot\frac{1}{4}+4\cdot\frac{1}{4}\cdot+6\cdot\frac{1}{4}+8\cdot\frac{1}{4}=5$$

$$E(x^2)=\sum x^2{}_i f(x_i)=4\cdot\frac{1}{4}+16\cdot\frac{1}{4}+36\cdot\frac{1}{4}+64\cdot\frac{1}{4}=1+4+9+16=30$$

$$\text{var}(x)=E(x^2)=30-25=5$$

توزیع اوسط نمونه:

	(6,2)	(6,4)	(6,8)	(6,6)	(2,4)	(2,2)	(2,6)	(2,8)
$\bar{x}$	4	5	7	6	3	2	4	5

	(4,2)	(4,4)	(4,6)	(4,8)	(8,2)	(8,4)	(8,6)	(8,8)
$\bar{x}$	3	4	5	6	5	6	7	8

$\bar{x}$	2	3	4	5	6	7	8
$f'(x)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$

اوسط توزیع نمونه یی:

$$\mu_{\bar{x}}=\sum_{i=1}^{n}\bar{x}\,f(\bar{x})=2\cdot\frac{1}{16}+3\cdot\frac{2}{16}+4\cdot\frac{3}{16}+5\cdot\frac{4}{16}+6\cdot\frac{3}{16}+7\cdot\frac{2}{16}+8\cdot\frac{1}{16}$$

$$=\frac{1}{8}+\frac{3}{8}+\frac{3}{4}+\frac{5}{4}+\frac{9}{8}+\frac{7}{8}+\frac{1}{2}=\frac{1+3+6+10+9+7+4}{8}$$

$$=\frac{40}{8}=5\Rightarrow\boxed{\mu_{\bar{x}}=5}$$

واریانس توزیع نمونه یی:

$$Var(\bar{x})=\sum_{i=1}^{n}\bar{x}_i^{\,2}\,f(\bar{x}_i)$$

$$=2^2\cdot\frac{1}{16}+3^2\cdot\frac{2}{16}+4^2\cdot\frac{3}{16}+5^2\cdot\frac{4}{16}+6^2\cdot\frac{3}{16}\cdot7^2\cdot\frac{2}{16}+3^2\cdot\frac{1}{16}$$

$$=\frac{1}{4}+\frac{9}{8}+3+\frac{25}{4}+\frac{27}{4}+\frac{49}{8}+4=0.25+1.125+3+6.25+6.75+6.125+4$$

$$=27.5$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}=?$$

فصل هفتم

عنوان درس: قضیهٔ لیمیت مرکزی

صفحهٔ کتاب (252-254)

وقت تدریس(1 ساعت درسی)

اهداف آموزشی **- دانشی** **- مهارتی** **- ذهنیتی**	• شاگردان مفهوم قضیهٔ لیمیت مرکزی را بدانند. • شاگردان سؤال‌های راجع به موضوع(قضیهٔ لیمیت مرکزی) را حل کرده بتوانند. • شاگردان به قضیهٔ لیمیت مرکزی علاقه‌مند شوند.
روش های تدریس	سؤال و جواب، کارهای گروهی
مواد ممد درسی	مواد که برای تدریس بهتر لازم می‌دانید.
توضیح ورودی **(5) دقیقه**	کارهای مقدماتی تدریس که بعد از داخل شدن به صنف ضروری است انجام دهید؛ بعداً فورمول بخش ورودی راروی تخته نوشته و در مورد فورمول طوری ذیل بپرسید: $\lim_{n\to\infty}\frac{S}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$ • آیا گفته می‌توانید که فورمول فوق، فورمول چیست؟ • آیا اجزای فورمول فوق را معرفی کرده میتوانید؟ کوشش نمایید تا جوابات درست را از شاگردان به دست آورید علاوه بر آن طور ذیل توضیح دهید. فورمول فوق راجع به قضیه لیمیت مرکزی می‌باشد، طوریکه N (تعداد عناصر جامعه)، n (تعداد عناصر نمونه) و S (انحراف معیاری جامعه) می‌باشد.

فعالیت جریان درس(28) دقیقه

شاگردان را به گروه‌های مناسب تقسیم نموده و به آنها وظیفه دهید تا فعالیت صفحهٔ 252 کتاب درسی را انجام دهند در جریان فعالیت از گروه‌ها نظارت نمایید تا تمام اعضای گروه در اجرای فعالیت سهم فعال داشته باشند، در ختم فعالیت نمایندهٔ یک گروه را بخواهید تا کار گروهی خویش را به دیگران توضیح دهد بعداً نتیجهٔ فعالیت را به شاگردان توضیح دهید.

میتوانید برای توضیح بهتر فعالیت از معلومات اضافی درس استفاده کنید، بعداً مثال صفحهٔ 253 کتاب درسی را روی تخته نوشته باسهم فعال شاگردان آنرا توضیح نمایید.

تحکیم درس(7) دقیقه

برای تحکیم درس می‌توانید یک مثال از بخش معلومات اضافی درس آورده آنرا حل نمایید.

ارزیابی ختم درس(5) دقیقه

برای ارزیابی درس میتوانید سؤالات ذیل را از شاگردان بپرسید:

1. هرگاه جامعه دارای اوسط μ و انحراف معیاری S باشد نمونهٔ که از جامعه انتخاب می‌شود اوسط و انحراف معیاری آن را از کدام فورمول به دست آورده میتوانیم؟(در صورتیکه بالای نمونه شرایط که در معلومات اضافی داده شده قابل تطبیق باشد)
2. توزیع نمونه‌یی را چگونه توسط کدام فورمول ستندرد(*Standardize*) می‌سازیم؟

معلومات اضافی

هرگاه متحول تصادفی X دارای توزیع نورمال باشد و اوسط آن μ و انحراف معیاری آن S باشد نمونهٔ که از توزیع X گرفته شده اندازهٔ آن n باشد و اوسط آن $\bar{x}$ باشد؛ پس جملات ذیل راجع به نمونه صدق می کند.

a) توزیع $\bar{x}$ توزیع نورمال است.

b) اوسط توزیع $\bar{x}$ عبارت از μ می‌باشد.

c) انحراف معیاری توزیع $\bar{x}$ عبارت از $\frac{S}{\sqrt{n}}$ می‌باشد.

هرگاه توزیع x نورمال باشد؛ پس توزیع $\bar{x}$ نیز نورمال است حتی که قیمت n به هر اندازه باشد، ما میتوانیم توزیع نورمال $\bar{x}$را ستندرد(*Standardize*) بسازیم البته با استفاده از فورمول‌های ذیل:

$$\mu_{\bar{x}} = \mu$$

$$S_{\bar{x}} = \frac{S}{\sqrt{n}}$$

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu_{\bar{x}}}{S_{\bar{x}}} = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$$

در فورمول فوق n تعداد عناصر نمونهٔ μ اوسط توزیع x و S انحراف معیاری توزیع X می‌باشد.

- هرگاه ما دربارهٔ نورمال بودن توزیع x معلومات نداشته باشیم؛ اما اندازهٔ نمونهٔ گرفته شده از توزیع x بیشتر از 30 باشد؛ پس توزیع نمونه گرفته شده نورمال است و قضیهٔ لیمیت مرکزی بالای آن قابل تطبیق است.

$$n \geq 30$$

$$\mu_{\bar{x}} = \mu$$

$$S_{\bar{x}} = \frac{S}{\sqrt{n}}$$

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu_{\bar{x}}}{S_{\bar{x}}}$$

- هرگاه ما دربارهٔ نورمال بودن توزیع x معلومات نداشته باشیم و نمونهٔ که از توزیع xانتخاب می‌شود دارای اندازهٔ $n = 8$باشد؛ پس توزیع نمونهٔ گرفته شده نورمال نمی‌باشد؛ زیرا باید $n \geq 30$ باشد.

• هرگاه توزیع x نورمال باشد و ما از آن نمونه به اندازۀ $n = 8$ انتخاب نماییم؛ پس این نمونه دارای توزیع نورمال است و شرایط قضیه لیمیت مرکزی که ذیلاً داده شده است، بالای آن قابل تطبیق است:

$$\mu_{\bar{x}} = \mu$$

$$S_{\bar{x}} = \frac{S}{\sqrt{n}}$$

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu_{\bar{x}}}{S_{\bar{x}}}$$

برای توضیح بهتر درس از مثال ذیل استفاده می کنیم:

مثال: هرگاه x دارای توزیع نورمال که اوسط آن $\mu = 18$ و انحراف معیاری آن $S = 3$ باشد، هرگاه ما یک نمونۀ $n = 5$ را از توزیع x انتخاب نماییم و $\bar{x}$ اوسط نمونه باشد شما در مورد توزیع $\bar{x}$ چی نظر دارید توزیع $\bar{x}$ را چگونه ستندرد کرده میتوانیم؟

حل: چون توزیع x نورمال است؛ پس توزیع $\bar{x}$ نیز نورمال می‌باشد. اگر سایز نمونه کوچکتر از 30 باشد؛ پس اوسط نمونه $\mu_{\bar{x}} = \mu = 18$ و انحراف معیاری آن طور ذیل محاسبه می‌شود:

$$S_{\bar{x}} = \frac{S}{\sqrt{n}} = \frac{3}{\sqrt{5}} = 1.3$$

مثال2: هرگاه اوسط توزیع x مساوی به $\mu = 15$ باشد و انحراف معیاری آن $S = 14$ باشد و از توزیع x یک نمونه به اندازۀ $n = 49$ انتخاب نماییم؛ پس $\mu_{\bar{x}}$ و $S_{\bar{x}}$ و $P(15 \le \bar{x} \le 17)$ را به دست آورید.

حل: چون $n \ge 30$ است؛ پس توزیع $\bar{x}$ نورمال است.

$$\mu = \mu_{\bar{x}} = 15$$

$$S_{\bar{x}} = \frac{S}{\sqrt{n}} = \frac{14}{\sqrt{49}} = \frac{14}{7} = 2$$

$$P(15 < \bar{x} < 17) = P(\frac{15-15}{\frac{14}{\sqrt{49}}} < Z < \frac{17-15}{\frac{14}{\sqrt{49}}}) = P(0 \le Z \le 1) = P(0) + P(1) = 0 + 0.0398$$

$$\boxed{P(15 \le \bar{x} \le 17) = 0.0398}$$

در اخیر نتایج درس را جمع بندی میکنیم.

قضیۀ لیمیت مرکزی بیان میکند که چگونه میتوانیم اوسط نمونه و انحراف معیاری آن و توزیع نمونه را استندرد بسازیم.

جواب به سؤال های تمرین

وزن جعبه‌هایی که توسط یک ماشین بسته بندی می شوند، دارای توزیع نورمال با اوسط $\mu = 250gr$ و انحراف معیاری $\delta = 20gr$ میباشند. مطلوب است محاسبۀاحتمال آن که اوسط وزن یک نمونۀ تصادفی $n = 16$ تایی جعبه‌ها کمتر از $240gr$ باشد.

حل: میدانیم که :

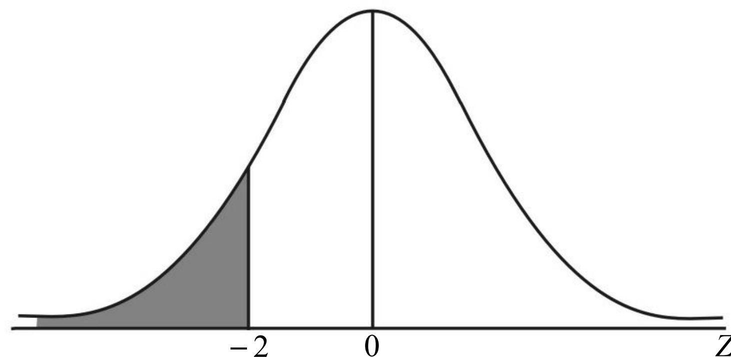
$$\mu = 250gr$$
$$\delta = 20gr$$
$$n = 16$$
$$\bar{x} \le 240$$

از فورمول ستندرد نمودن توزیع نمونه‌یی استفاده نموده داریم که:

$$Z_n = \frac{\bar{x}_n - \mu}{\frac{\delta}{\sqrt{n}}} = \frac{240-250}{\frac{20}{\sqrt{16}}} = \frac{-10}{\frac{20}{4}} = -2$$

$$p(\bar{x}_n \le 240) = p(Z_n \le -2) = 0.9772$$

هرگاه منحنی توزیع نورمال آن را ترسیم نمایم داریم که:



قیمت $p(-2)$ را از جدول(1)توزیع نورمال محاسبه می کنیم طوری که طرف چپ جدول درستون اول سطر 2− یا 2 را پیدا می کنیم بعداً طرف راست عدد 2 ستون 0.0 را پیدا می کنیم دیده می شود که قیمت $p(-2)$ ، 0.9772 می باشد.

یادداشت: طوری که دیده می شود مساحت تحت منحنی در یک انتروال محدود نمی باشد. پس قیمت $p(-2)$ را از جدول (1) که در کتاب درسی موجود است به دست می آوریم.

یا از جدول (1) قیمت $p(-2)$ را پیدا می کنیم بعداً در قیمت $p(-2)$ عدد 0.5 را جمع می کنیم عدد 0.5 مساحت نیم تحت منحنی توزیع نورمال می باشد.



فصل هفتم

عنوان درس: توزیع نمونهٔ نسبت

صفحهٔ کتاب (255-256)

وقت تدریس(1 ساعت درسی)

اهداف آموزشی **- دانشی** **- مهارتی** **- ذهنیتی**	• شاگردان مفهوم توزیع نمونهٔ نسبت یا کثرت نسبی را بدانند. • شاگردان فورمول توزیع نمونهٔ نسبت را با اجزای آن معرفی کرده بتوانند. • شاگردان سؤالهای درس را حل کرده بتوانند. • شاگردان با کسب دانش و مهارت فوق متکی به خود شده و احساس خوشی نمایند.
روش های تدریس	سؤال و جواب، کارهای گروهی، کار انفرادی
مواد ممد درسی	مواد که برای تدریس بهتر لازم می‌دانید.
توضیح ورودی (5) دقیقه	در قدم اول کارهای مقدماتی تدریس که ضروری است انجام دهید بعداً به توضیح ورودی اقدام کنید و سؤالات ذیل را از شاگردان بپرسید: • در شکل چی می‌بینید؟ • هرگاه در یک شهر A به تعداد n نفر می‌خواهند یک شخص B را به عنوان شاروال انتخاب نمایند؛ اگر این افراد مورد سؤال قرار گیرند و x نشان دهندهٔ تعداد اشخاص موافق باشد کثرت نسبی آن مساوی به چیست؟ کوشش کنید تا جوابات درست را از شاگردان به دست آورید. علاوه بر آن توضیح دهید که ما در شکل یک تعداد افراد را مشاهده می‌کنیم که میخواهند تا یک نفر را به عنوان شاروال انتخاب کنند هرگاه x تعداد افراد موافق را نشان دهد؛ پس کثرت نسبی این افراد یا توزیع نمونهٔ نسبت مساوی است به: $\hat{P}=\frac{x}{n}$ طوریکه x تعداد افراد موافق و n تعداد افراد شهر را نشان می‌دهد.

فعالیت جریان درس(28) دقیقه

شاگردان را به گروه‌های مناسب تقسیم نموده و به آنها وظیفه دهید تا فعالیت صفحهٔ 255 کتاب درسی را انجام دهند در جریان فعالیت رهنمایی لازم را ارائه کنید، توجه داشته باشید تا تمام اعضای گروه در اجرای فعالیت سهم فعال داشته باشند. بعداً نمایندهٔ یک گروه را بخواهید تا کار گروهی خویش را به دیگران توضیح دهد، بعداً نتیجهٔ فعالیت را به شاگردان توضیح دهید برای توضیح بهتر فعالیت میتوانید از معلومات اضافی درس استفاده کنید. بعداً مثال صفحهٔ 256 کتاب درسی را باسهم فعال شاگردان توضیح دهید.

تحکیم درس(7) دقیقه

برای تحکیم درس، مثالی که ذیلاً داده شده است روی تخته بنویسید و از یک شاگرد داوطلب بخواهید تا آن را حل

نماید. همزمان شاگردان دیگر باید مثال را در کتابچه‌های شان حل نمایند؛ سپس طریقهٔ حل مثال کتابچه هایشان را با حل روی تخته مقایسه کنند.

مثال هرگاه یک سکه را 18 دفعه پرتاب کنیم و 6 دفعه سکه به روی شیر آید آیا میتوانید کثرت نسبی آن را محاسبه کنید؟

حل میدانیم که:

x : تعداد حوادث آمدن سکه به روی شیر.

n : تعداد پرتاب سکه.

$$\hat{P}=\frac{x}{n} \Rightarrow \hat{P}=\frac{6}{18}=\frac{1}{3}$$

ارزیابی ختم درس(5) دقیقه

برای اینکه مطمئن شوید آیا شاگردان درس جدید را فرا گرفته اند یا خیر؟ سؤالات ذیل را از شاگردان بپرسید:

1. فورمول نسبت توزیع نمونه‌یی مساوی به چیست؟
2. اوسط و انحراف معیاری $\hat{P}$ مساوی به چیست؟
3. راجع به موضوع نسبت توزیع نمونه‌یی یک مثال زنده را ارائه کنید.

معلومات راجع به سؤال‌های ارزیابی در بخش معلومات اضافی موجود اند.

معلومات اضافی

آمارهٔ نسبت نمونهٔ و یا کثرت نسبی که به $\hat{P}$ نشان داده می‌شود فورمول آن مساوی است به: $\hat{P}=\frac{x}{n}$

مثلاً: هرگاه از افراد شهر برای A رای گیری شود تا شخص A به صفت شاروال تعیین گردد، هرگاه تعداد تمام افراد شهر مساوی به 70 باشد و تعداد افراد موافق مساوی به 42 باشد؛ پس x تعداد افراد موافق را نشان میدهد؛ یعنی $\hat{P}$ کثرت نسبی مساوی است به: $\hat{P}=\frac{42}{70}$

وریانس و انحراف معیاری $\hat{P}$ توسط فورمولهای ذیل محاسبه می‌شود:

$$E(\hat{p})=\binom{x}{n}\frac{1}{n}E(x)=P$$

$$V(\hat{p})=\frac{Pq}{n}$$

جواب به سؤال های تمرین

1. احتمال اینکه شخصی فورم درخواست استخدام را به طور کامل و بدون اشتباه پر کند $P=0.7$ می باشد. یک نمونه $n=200$ تایی از فورم های استخدام پر شده را انتخاب کرده ایم.
   a. احتمال آن را محاسبه کنید که $\hat{P}$ در داخل فاصلهٔ ± 0.05 از نسبت جامعه بیفتد.
   b. احتمال آن را حساب کنید که $\hat{P}$ بیشتر از 0.6 باشد.

فصل هفتم

عنوان درس: نکات مهم فصل

صفحهٔ کتاب (257-258)

وقت تدریس(1 ساعت درسی)

اهداف آموزشی **- دانشی** **- مهارتی** **- ذهنیتی**	• شاگردان نکات مهم فصل را بفهمند. • شاگردان نکات مهم فصل را تشریح و توضیح کرده بتوانند. • شاگردان به نکات مهم فصل علاقه‌مندی پیدا کرده و آن را در زنده‌گی روزمرهٔ خود به کار ببرند.
روش های تدریس	سؤال و جواب، کار انفرادی
مواد ممد درسی	چارت
توضیح ورودی (5) دقیقه	در قدم اول کارهای مقدماتی تدریس را که بعد از داخل شدن به صنف ضروری است انجام دهید، بعداً چارت نکات مهم فصل را که از قبل آماده نموده اید پیش روی تخته آویزان نمایید و توجه شاگردان را به نکات مهم فصل معطوف دارید و اهمیت نکات مهم فصل را به آنها واضح سازید.

فعالیت جریان درس(28) دقیقه

از شاگردان بخواهید تا به ترتیب یک یک نفر یک نکتهٔ مهم فصل را خوانده و آنرا توضیح نماید، هرگاه در وقت توضیح کدام اشتباه بروز کند آن را تصحیح کنید.

تحکیم درس(7) دقیقه

در این بخش درس مشکلات شاگردان را در نکات مهم فصل حل کنید و نکات که در آن شاگردان مشکل دارند توجه بیشتر نمایید.

ارزیابی ختم درس(5) دقیقه

برای اینکه مطمئن شوید آیا شاگردان نکات مهم فصل را یاد گرفته اند یا خیر؟ چند سؤال از سؤالات ذیل از شاگردان بپرسید:

1. متحول تصادفی را تعریف و انواع آن را بیان کنید.
2. فورمول‌های احتمال تجمعی و احتمال مجزای متحول تصادفی X مساوی به چیست؟
3. فورمول توزیع برنولی مساوی به چیست؟
4. فورمول‌های اوسط، انحراف معیاری توزیع دوجمله‌یی ر ابیان کنید.
5. فورمول توزیع احتمال پواسن را بیان کنید.

6. هدف قضیهٔ لیمیت مرکزی و فورمول‌های آن را ارائه کنید.
7. فورمول که توسط آن میتوان توزیع نورمال را استندرد ساخت ارائه کنید.
8. فورمول کثرت نسبی و اجزای آن را تعریف نمایید.
9. نمونه را تعریف و روش‌های نمونه‌گیری را توضیح دهید.
10. اوسط نمونه و توزیع اوسط نمونه را چگونه تشکیل کرده میتوانیم؟

تمرینات عمومی فصل هفتم

1. دو سکه را چهار مرتبه با هم پرتاب کنید و تعداد خط ها را در نظر بگیرید:

a) متحول های تصادفی را به صورت تابع نشان دهید.

b) احتمال هر یک از پرتاب ها را با فضای نمونه نسبت دهید.

c) تابع احتمال مجزا و تجمعی آن را بنویسید.

حل: متحول تصادف X تابعی است که ناحیه تعریف آن فضای نمونه و ناحیهٔ قیمت‌های آن اعداد حقیقی (IR) می باشد.

هرگاه دو سکه چهار دفعه پرتاب شود فضای نمونهٔ آن قرار ذیل است:

$$S=\{HH\ ,\ HT\ ,\ TH\ ,\ TT\}$$

a) هرگاه متحول تصادفی x تعداد خط آمدن را در عنصر S نشان دهد؛ پس

HH عنصر S می باشد تعداد خط های آن $X(HH)=0$

$TH\ ,\ HT$ عنصر از S می‌باشد تعداد خط های آن $X(HT\ ,\ TH)=1$

TT عنصر S می باشد تعداد خط های آن $X(TT)=2$

b) حالا احتمال متحول تصادفی را نظر به فضای نمونه می نویسیم.

x	0	1	2
$f(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$

c) احتمال مجزا

$$\left[0\ ,\ \frac{1}{4}\right],\left[1\ ,\ \frac{1}{2}\right],\left[2\ ,\ \frac{1}{4}\right]$$

تابع احتمال تجمعی

$$F(x)=\sum_{i=1}^{3} f(x_i)=f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\boxed{1}$$

2. هر گاه احتمال ناقص بودن یک جوره بوت $P=0.1$ باشد، اوسط و انحراف معیار، بوت های ناقص را در یک نمونه $n=400$ جوره بوت دریافت کنید.

حل:

$P=0.1$
$n=400$
$\delta=?$
$\mu=?$

اوسط $\mu=np=400\times 0.1=40$

انحراف معیاری $\delta = \sqrt{npq} = \sqrt{400 \times 0.1 \times 0.9} = \sqrt{36} = 6$

3. در ذخیره خانهٔ یک شرکت به تعداد 500 پایه کمپیوتر وجود دارد که از آن جمله 50 پایهٔ آن نواقص دارد. یک مشتری 10 پایه از این کمپیوتر ها را می خرد، احتمال اینکه وی 8 پایهٔ سالم را خریده باشد چقدر است؟

حل: برای حل سؤال از توزیع دو جمله یی استفاده می کنیم.

$$p(x=m) = \binom{n}{m} p^m \cdot q^{n-m}$$

$n=$ تعداد کمپیوتر های خریده شده

$m=$ در کمپیوتر های خریده شده تعداد کمپیوتر های سالم

$p=$ احتمال به دست آمدن کمپیوتر ناسالم

$q=$ احتمال به دست آمدن کمپیوتر سالم

$p($ احتمال سالم بودن 8 کمپیوتر $) = \binom{10}{8}(0.1)^8 \cdot (0.9)^2$

$$= \frac{10!}{2! \cdot 8!} \cdot (0.1)^8 (0.9)^2 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8!}{2 \cdot 1 \cdot 8!} \cdot (0.00000001)(0.81)$$

$$= 0.0000003645$$

پس 0.00003 فیصد امکان موجود است که 10 کمپیوتر 8 آن سالم باشد.

4. از اطلاعات زیر که مربوط به دو پارامتر اوسط و انحراف معیاری می شود برای رسم یک توزیع نورمال استفاده نمایید.

ابتدا یک محور افقی رسم کنید و نقاط $\bar{x}$, $\bar{x}+s$, $\bar{x}-s$, $\bar{x}+2s$ و $\bar{x}-2s$ را بر روی آن محور مشخص کنید؛ سپس نقطهٔ را به ارتفاع اختیاری h در بالای $\bar{x}$ در نظر بگیرید. اکنون در بالای $\bar{x}+s$ نقطهٔ به ارتفاع $0.6h$ انتخاب کنید؛ یعنی نقطه با مختصات $(\bar{x}+s, 0.6h)$ چون منحنی نورمال متناظر است همین عمل را در خصوص $\bar{x}-s$ نیز انجام دهید. حال در بالای $\bar{x}+2s$ و $\bar{x}-2s$ دو نقطهٔ به ارتفاع h و $0.15h$ را در نظر بگیرید. متوجه باشید که برای رسم دقیق منحنی نورمال باید اعداد $0.6067h$ و $0.1354h$ به جای $0.6h$ و $0.15h$ مورد استفاده قرار گیرند. در نتیجه این نقاط را توسط یک خط منحنی به هم وصل کنید و بگویید که این منحنی در کدام انتروال محدب و در کدام انتروال مقعر است.

5. یک مطالعه در یک شفاخانه نشان می دهد که تعداد متوسط مراجعین بین 6 الی 8 بعد از ظهر روز شنبه 25 نفر است. فرض کنید که توزیع احتمال پواسن در این حالت صدق نماید.

- توزیع احتمال تعداد مراجعین شفاخانه بین ساعات 6 الی 8 بعد از ظهر روز شنبه را به دست آرید و گراف آن را رسم کنید آیا این توزیع خمیده است؟
- مقدار اوسط و انحراف معیار این توزیع را به دست آرید.
- آیا ممکن است که بیش از 7 نفر بین ساعات 6 الی 8 بعد از ظهر روز شنبه به شفاخانه مراجعه کند، چرا؟

حل:

6. فرض کنید تعداد اشتباهات یک صفحهٔ کتاب دارای توزیع پواسن با پارامتر $\lambda = \frac{1}{2}$ است.

حل : برای حل سؤال از توزیع پواسن استفاده می کنیم.

a) حداقل یک 2 اشتباه تایپی در یک صفحه موجود باشد. $k=1$

برای محاسبهٔ قیمت $e^{-\frac{1}{2}}$ از ماشین حساب به طور ذیل استفاده می کنیم.

$$\lambda = \frac{1}{2}$$

$$f(k,\lambda) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

$$f(1,\frac{1}{2}) = \frac{(\frac{1}{2})^1 \cdot e^{-1/2}}{1!} = \frac{\frac{1}{2}\times 0.61}{1} \Rightarrow \boxed{f(1,\frac{1}{2}) = 0.30}$$

$$x = e^{-\frac{1}{2}}$$

$$x = \frac{1}{e^{+\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

طوری که در جز (a) ذکر شده اگر یک اشتباه تایپی 2 اشتباه، 3 اشتباه، 4 اشتباه، 5 اشتباه و بالآخره 6 اشتباه دریک صفحه وجود داشته باشد، در قدم اول احتمال هریک را جدا محاسبه می نماییم بعداً تمام احتمال ها را جمع می کنیم.

$$f(2,\frac{1}{2}) = \frac{(\frac{1}{2})^2 \cdot e^{-\frac{1}{2}}}{2!} = \frac{\frac{1}{4}\times 0.61}{2} = 0.15$$

$$f(3,\frac{1}{2}) = \frac{(\frac{1}{2})^3 \cdot e^{-\frac{1}{2}}}{3!} = \frac{\frac{1}{8}\times 0.61}{6} = 0.012$$

$$f(4,\frac{1}{2}) = \frac{(\frac{1}{2})^4 \cdot e^{-\frac{1}{2}}}{4!} = \frac{\frac{1}{16}\times 0.61}{24} = .0015$$

$$f(5,\frac{1}{2}) = \frac{(\frac{1}{2})^5 \cdot e^{-\frac{1}{2}}}{5!} = \frac{\frac{1}{32}\times 0.61}{120} = 0.00016$$

$$f(6,\frac{1}{2}) = \frac{(\frac{1}{2})^6 \cdot e^{-\frac{1}{2}}}{6!} = \frac{\frac{1}{64}\times 0.61}{720} = 0.000013$$

احتمال حد اقل بودن یک اشتباه تایپی دریک صفحه عبارت است از :

$$f(1,\frac{1}{2})+f(2,\frac{1}{2})+f(3,\frac{1}{2})+f(4,\frac{1}{2})+f(5,\frac{1}{2})+f(6,\frac{1}{2})=0.30+0.15+0.012+0.0015$$
$$+0.00016+0.000013=0.46$$

پس 46 فیصد احتمال موجود است که دریک صفحه اشتباه تایپی وجود داشته باشد.

b) جز b با استفاده از حل جز a باید حل شود.

c) احتمال اینکه از 3 الی 6 اشتباه تایپی دریک صفحه وجود داشته باشد.

$$f(3,\frac{1}{2})+f(4,\frac{1}{2})+f(5,\frac{1}{2})+f(6,\frac{1}{2})=0.012+0.0015+0.00016+0.000013=0.013$$

پس 1.3% احتمال 3 الی 6 اشتباه دریک صفحه کتاب موجود است.

7. فرض کنید که قطر پیستون هایی که توسط ماشین اتوماتیکی ساخته می شود به طور نورمال با اوسط 25 میلی متر و انحراف معیاری 0.5 میلی متر توزیع شده اند.

a. احتمال اینکه قطر پیستون بین 25.2 تا 25.9 میلی متر باشد چقدر است؟

b. چه نسبتی از پیستون ها دارای قطر های معادل 25 میلی متر و کمتر اند.

c. اگر 1000 پیستون ساخته شود چند دانهٔ آن ها انتظار می رود که قطری کمتر از 24.07 ملی متر داشته باشد.

d. چه فیصدی از پیستون های تولیدی قطر معادل 24.56 میلی متر یا بیشتر دارند؟

حل a):

$\mu = 25mm$

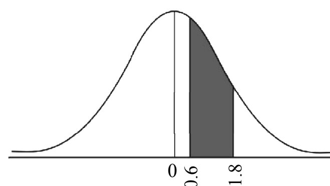
$\delta = 0.5mm$

$x_1 = 25.2$

$x_2 = 25.9$

درقدم اول قیمت های x_1 و x_2 را از جنس z_1 و z_2 به دست می آوریم.

$$z_1=\frac{x_1-\mu}{\delta}=\frac{25.2-25}{0.5}=\frac{0.2}{0.5}=0.4$$
$$z_2=\frac{x_2-\mu}{\delta}=\frac{25.9-25}{0.5}=\frac{0.9}{.5}=1.8$$



حال احتمال بودن قطر پستون میان 25.2 و 25.9 را محاسبه می کنیم.

فورمول داریم.

$$P(z)=\begin{cases} z_1 \le z \le z_2 & , \quad 0 \le z_2 \\ P(z_2)=P(z_1) & , \quad 0 \le z_1 \end{cases}$$

$$P(z_1 \le z \le z_2)=P(z_2)-P(z_1)$$
$$=P(1.8)-P(0.4)=P(1.8)-P(0.4)$$
$$=0.4641-0.1554=0.3087$$

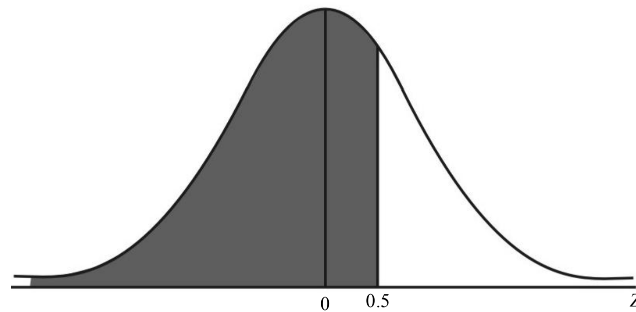
قیمت های $p(0.4)$ و $p(1.8)$ را از جدول (2)به دست می آوریم.

پس 30.87 فیصد امکان موجود است که قطر پستون میان 25.2 و 25.9 باشد.

b) چه نسبتی از پستون ها دارای قطری معادل 25 ملی متر و کمتر هستند.

حل: طوری که میدانیم.

$$25 \geq x$$
$$\mu = 25mm$$
$$\delta = 0.5mm$$
$$x = 25mm$$
$$z = \frac{x-\mu}{\delta} = \frac{25-25}{0.5} = 0$$
$$P(z \leq 0) = 0.5 + P(0) = 0.5$$
$$P(25 \geq x) = P(0 \geq z)$$



درقدم اول قیمت x را از جنس z به دست می آوریم.

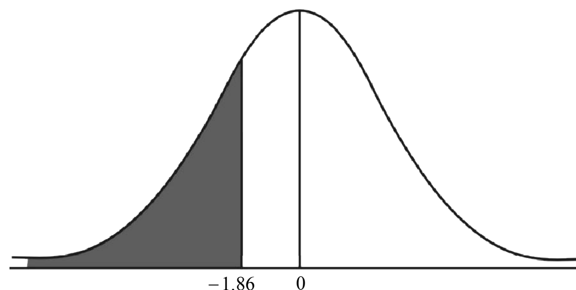
طوری که دیده می شود $z_1 \leq 0$ تمام مساحت طرف چپ منحنی را نشان میدهد یعنی مساحت دریک انتروال محدود نمی باشد؛ پس برای قیمت $z = 0$ از جدول (1) کتاب درسی استفاده میکنیم. ویا اگر از جدول (2) استفاده نماییم با قیمت به دست آمده عدد 0.5 راجمع نمی کنیم نظر به جدول (1) قیمت $P(z \leq 0) = 0.5$ می باشد.

هرگاه از جدول (2) استفاده نماییم.

$$P(z \leq 0) = P(z) + 0.5 = 0 + 0.5 = 0.5$$

c) اگر 1000 پستون ساخته شود، انتظار می رود که قطر چند دانهٔ آنها از 24.07 ملی مترکم باشد.

$$\mu = 25mm$$
$$\delta = 0.5mm$$
$$x = 24.07$$
$$24.07 \geq x$$



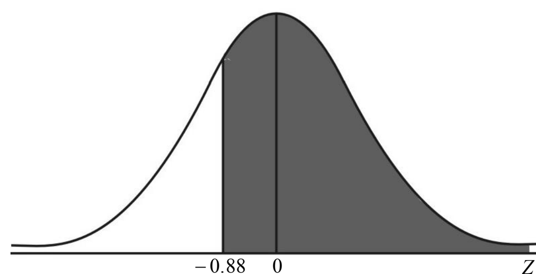
قیمت x را از جنس z به دست می آوریم.

$$z = \frac{x-\mu}{\delta} = \frac{24.07mm - 25mm}{0.5mm} = -1.86$$
$$P(x \leq 24.07) = P(z \leq -1.86)$$

برای پیدا کردن قیمت $P(1.86)$ از جدول (1) توزیع نورمال که درکتاب درسی موجود است استفاده می کنیم طوری که درستون اول طرف چپ جدول سطر 1.8 را پیدا می کنیم؛ بعداً به طرف راست عدد 1.8 ستون 6 را پیدا نموده دیده می شود که قیمت $P(1.86)$ ، 0.9686 می باشد.

d) چند فیصد از پستون های تولیدی، قطر معادل 24.56 ملی متر یا بیشتر را دارند.

$\mu = 25mm$
$\delta = 0.5mm$
$24.56 \le x$



برای پیدا کردن قیمت $P(0.88)$ درجدول(1) طوری ذیل عمل می کنیم: در قدم اول ستون اول طرف چپ جدول را درنظر گرفته سطر 0.8 راپیدا می کنیم؛ بعداً در طرف راست عدد 0.8 ستون 8 را پیدا می کنیم. می‌بینیم که قیمت $P(0.88)$ عبارت از 0.8106 می باشد.

$$P(z \ge 0.88) = P(0.88) = .8106$$

پس از پستون های تولید شده 81.06 پستون ها دارای قطر 24.56 ملی متر می باشد.

8. اگر $x_1, x_2, ..., x_n$ یک نمونۀ تصادفی از متحول تصادفی x باشند آیا توابع $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$ ، $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$ ، $\frac{x_1 + x_2}{x_4}$ و $x_1 + 3x_2 - x_3$ آماره اند؟

9. اگر x یک متحول تصادفی با پارامتر های μ و δ^2 باشد آیا توابع $\frac{3x_1 - 2x_3 - \delta}{8\mu + x_2}$ ، $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2$ ، $x_1 + x_3 - \mu$ در صورتیکه μ و δ^2 مجهول باشند؛ آیا توابع فوق را آماره گفته می توانیم؟

10. جامعه شامل 4 گروه برق می باشد که طول عمر آن ها به حساب ساعت عبارت است از: 108 104 112 103 است گروهی را تصادفی انتخاب می‌کنیم. فرض کنید متحول تصادفی x نشان دهندهٔ طول عمر گروه انتخاب شده باشد.

- توزیع احتمال x را بنویسید؟
- $E(x)$ و $V(x)$ را محاسبه کنید؟

11. میزان درآمد افراد یک شهر دارای توزیع غیرنورمال با اوسط $\mu = 90$ افغانی و انحراف معیاری 25 افغانی است احتمال آن که مجموع درآمد افراد یک نمونه 225 نفره بیش از 21000 افغانی باشد، چقدر است؟

حل:

$$\mu = 90$$
$$\delta = 25$$
$$n = 255$$
$$x = 21000$$

مفاد اوسط هر عنصر نمونه را طوری ذیل محاسبه می کنیم:

$$\overline{x}_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{21000}{225} = 93.\overline{3}$$

طوری که در سؤال گفته شده است مجموع در آمد افراد یک نمونه بیش از 21000 افغانی می باشد.

پس اوسط در آمد یک فرد نمونه بیشتر از $93.\overline{3}$ می باشد.

اگر از فورمول استندرد نمودن توزیع نمونه یی استفاده کنیم، داریم که:

$$z_n = \frac{\overline{x}_n - \mu}{\frac{\delta}{\sqrt{n}}} = \frac{93.3 - 90}{\frac{25}{\sqrt{225}}} = \frac{3.3}{\frac{25}{15}} = 1.98$$

$$P(x_n \ge 93.3) = P(z_n \ge 1.98) = .9761 = 1 - P(z \le 1.98) = 1 - 0.9761 = 0.0239$$

12.می دانیم که 56% مردم طرف دار کاندید A اند. چقدر احتمال دارد که در یک نمونه $n = 50$ تایی، حداقل 60% افراد طرفدار کاندید A باشند.

حل: $\hat{p} = \frac{x}{n}$ و از فورمول استندرد نمودن توزیع نمونه یی داریم که:

$$z = \frac{\widehat{P} - P}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}$$

$$P = 56\% = 0.56$$

$$\widehat{P} = 60\% = 0.6$$

$$n = 50$$

$$q = 1 - 0.56 = 0.44$$

$$z = \frac{\widehat{P} - P}{\sqrt{\frac{pq}{n}}} = \frac{0.6 - 0.56}{\sqrt{\frac{0.56 \times 0.44}{50}}} = \frac{0.04}{0.070} = 0.5$$

$$P(\widehat{p} \ge 0.6) = 1 - P(z) = 1 - 0.7157 = 0.2843$$

13.در مثال 12 اگر $P = 0.4$ باشد یعنی احتمال این که فردی طرفدار کاندید A باشد مساوی به 0.4 است، یک نمونهٔ $n = 200$ تایی انتخاب می کنیم، چقدر احتمال دارد که لااقل 100 نفر از آن ها طرفدار کاندید A باشند.

حل: برای حل سؤال از توزیع نورمال استفاده می کنیم.

$$n = 200 \qquad \mu = np = 200 \times 0.4 = 80$$

$$P = 0.4 \qquad \delta = \sqrt{npq} = \sqrt{200 \times 0.4 \times 0.96} = 8.7$$

$$\mu = ?$$

$$\delta = ?$$

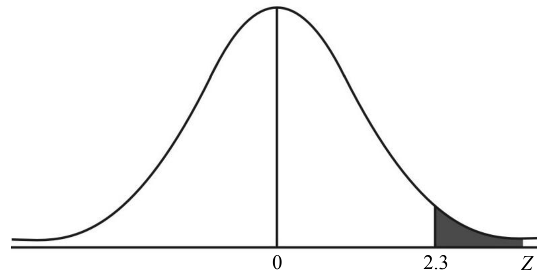
$$q = 0.96$$

میدانیم که $P(100 \le x) = ?$

متحول تصادفی x را به $z-score$ تبدیل می نماییم.

$$z=\frac{x-\mu}{\delta}=\frac{100-80}{8.7}=2.3$$

$$P(100\le x)=P(2.3\le z)$$



طوری که میدانیم نصف مساحت تحت منحنی توزیع نورمال مساوی است به 0.5 و برای به دست آوردن قیمت $P(2.3)$ از جدول (1) استفاده می نمایم. طوریکه در ستون اول طرف چپ جدول سطر 2.3 را پیدا می کنیم و سپس قیمت طرف راست عدد 2.3 را درستون 0 نشانی می‌کنیم؛ پس قیمت $P(2.3)$ عبارت از 0.9893 می باشد.

$$P(100\le x)=(2.3\le z)=0.9893$$

98.93 فیصد احتمال موجود است که 100 نفر طرف دار کاندید A باشند.



فصل هشتم

عنوان درس: فضاهای نمونه گسسته و پیوسته

صفحهٔ کتاب (263-264)

وقت تدریس(1 ساعت درسی)

اهداف آموزشی **- دانشی** **- مهارتی** **- ذهنیتی**	• شاگردان مفهوم فضاهای نمونه گسسته(غیر متمادی) و پیوسته(متمادی) را بدانند. • شاگردان فضاهای نمونه گسسته(Continues) و پیوسته(discrete) را از هم تفکیک کرده بتوانند. • شاگردان از شناخت فضاهای نمونه گسسته و پیوسته در زنده‌گی روزمره استفاده نموده و احساس خوشی نمایند.
روش های تدریس	سؤال و جواب، کارهای گروهی و انفرادی
مواد ممد درسی	چارت شکل ورودی، و مودل دانهٔ تاس(dice)
توضیح ورودی **(5) دقیقه**	در قدم اول کارهای مقدماتی تدریس را که بعد از داخل شدن به صنف ضروری است انجام دهید بعداً به توضیح ورودی اقدام نمایید. چارت شکل ورودی را که از قبل آماده نموده اید پیش روی صنف آویزان نمایید و از شاگردان بپرسید: • در شکل چی می‌بینید؟ • آیا در ریختن آب از دو نل فرق دیده می‌شود؟ کوشش نمایید تا فرق ریختن آب را از نل‌ها واضح سازید؛ علاوه برآن میتوانید شکل را چنین توضیح نمایید: شما در شکل دو نل آب را مشاهده می‌کنید از یک نل آب طوری می‌ریزد که قطره‌های آب قابل شمارش است اما از نل دوم به شکل فواره می‌ریزد که قطره‌های آن قابل شمارش نمی‌باشد.

فعالیت جریان درس(28) دقیقه

شاگردان را به گروه‌های مناسب تقسیم نموده و به آنها وظیفه دهید تا فعالیت صفحهٔ 263 کتاب درسی را انجام دهند. به یاد داشته باشید که این فعالیت به شکل عملی صورت گیرد؛ یعنی به شکل تجربه انجام داده می‌شود. در وقت اجرای فعالیت از گروه‌ها نظارت نمایید تا تمام اعضای گروه در انجام فعالیت سهیم باشند. بعد از ختم فعالیت از نمایندهٔ یکی از گروه‌ها بخواهید تا کار گروهی خویش را به دیگران توضیح نماید. اگر در وقت توضیح کدام اشتبا رخ دهد؛ پس اصلاح نمایید. تعریفی که در آخر فعالیت موجود است ودر مورد فضای نمونهٔ گسسته وپیوسته است به شاگردان توضیح نمایید؛ سپس مثال اول صفحهٔ 263 کتاب درسی را به روی تخته بنویسید و آن را حل نمایید طوریکه شاگردان سهم فعال داشته باشند، یعنی حل آن روی تخته به شکل سؤال و جواب صورت گیرد.

تحکیم درس(7) دقیقه

برای تحکیم درس همینکه شاگردان مفهوم فضاهای نمونهٔ گسسته و پیوسته را فهمیدند، مثال دوم صفحهٔ 264 کتاب درسی را روی تخته بنویسید و یکتن از شاگردان داوطلب را بخواهید تا مثال را روی تخته حل نماید همزمان به شاگردان دیگر وظیفه دهید تا مثال مذکور را در کتابچه‌های شان به شکل انفرادی حل نمایند در ختم هرگاه حل مثال روی تخته کدام اشتباه داشته باشد توسط یک شاگرد دیگر آن را اصلاح نمایید. در اخیر از شاگردان بخواهید تا طریقهٔ حل کتابچه‌های شانرا با حل روی تخته مقایسه نمایند و اشتباهات خویش را اصلاح نمایند.

ارزیابی ختم درس(5) دقیقه

برای اینکه مطمئن شوید آیا شاگردان درس را فهمیده اند یا خیر؟ سؤالات ذیل را از شاگردان بپرسید و کوشش نمایید تا جوابات درست را به دست آرید:

1. فضاهای نمونهٔ گسسته(غیر متمادی) و پیوسته(متمادی) را تعریف نمایید.
2. هرگاه یکی از فضاهای نمونه محدود باشد و عناصر آن قابل شمارش باشد آیا فضای نمونه گسسته است؟
3. یک مثال راجع به فضای نمونه پیوسته بگویید.
4. هرگاه یکی از فضاهای نمونه محدود باشد و عناصر آن قابل شمارش نباشد آیا فضای نمونهٔ پیوسته است؟
5. هرگاه $S=\{a_1,a_2,\ ...\ ,a_n\}$ یک فضای نمونه باشد بگویید که این یک فضای نمونهٔ گسسته(Discrete sample space) است و یا پیوسته(Continuous sample space)؟

معلومات اضافی

معلومات اضافی که در ذیل داده شده است در کتاب‌های درسی صنوف(7، 8، و 9) موجود است در اینجا مختصراً ذکر می کنیم.

تاس(Dice): یک دانه مکعبی شکل است که دارای 6 سطحه می‌باشد و هر سطح آن به ترتیب دارای خال‌های سیاه به تعداد ⚀، ⚁، ⚂، ⚃، ⚄، ⚅ می‌باشد.

فضای نمونه(Sample space): هرگاه تمام نتایج یک تجربه را در یک سیت جمع‌آوری کنیم ست را فضای نمونه گویند؛ مثلاً: در تجربه پرتاب یک سکه فضای نمونهٔ آن عبارت از: $S=\{$ شیر، خط $\}$

هرگاه فضای نمونه نامتناهی باشد ما چنین فضای نمونه را به دو دسته تقسیم میکنیم.

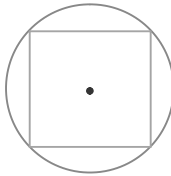
1. **فضای نمونهٔ گسسته(Discrete sample space):** فضای نمونه که عناصر آن قابل شمارش باشد به نام فضای نمونه گسسته یاد می‌شود؛ مثلاً: $S=\{a_1,a_2,a_3\ ...\}$
2. **فضای نمونهٔ پیوسته(Continuous sample space):** فضای نمونهٔ که عناصر آن قابل شمارش نباشد به نام فضای نمونهٔ پیوسته یاد می‌شود؛ مثلاً:
   a) انتخاب یک عدد حقیقی در انتروال $(2,4)$
   b) در یک مساحت انتخاب یک نقطه

مثال‌های فوق مربوط به فضای نمونهٔ پیوسته می‌باشد. فضای نمونهٔ پیوسته دارای مثال‌های گوناگون می‌باشد، اما در این فصل مثال‌هایی را به کار می‌بریم که دارای شکل هندسی باشند.

جواب به سؤال های تمرین

1- تیر اندازی در داخل یک دیسک دایروی شعاع r را در نظر گرفته فضای نمونهٔ محل اصابت تیر در داخل دایره را که نزدیک به مرکز، اصابت می نماید ارائه می‌کند، بگویید که چگونه یک فضای نمونه است؟

حل : فضای نمونهٔ پیوسته می تواند به شکل انتروال اعداد حقیقی، اشکال هندسی و حجم اشکال هندسی ارائه گردد. چون درسؤال تمام نقاط داخلی دایره مورد مطالعه قرار می گیرد؛ بنابرین دایرهٔ مذکور یک فضای نمونهٔ پیوسته است.

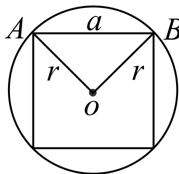


2- یک نقطه را به صورت تصادفی در داخل دایرهٔ شکل مقابل انتخاب می کنیم. مطلوب است احتمال آنکه نقطه داخل مربع باشد.

حل: یک دایره با شعاع r در نظر می گیریم.

A: حادثهٔ اتفاقی موجودیت نقطهٔ انتخاب شده در شکل مربع.

چون OAB یک مثلث قایم الزاویه است نظر به قضیهٔ فیثاغورث داریم که:



$$a^2 = r^2 + r^2 = 2r^2$$

$$a = \sqrt{2}r$$

$$P(A) = \frac{\text{مساحت مربع}}{\text{مساحت دایره}} = \frac{(r\sqrt{2})(r\sqrt{2})}{\pi r^2} = \frac{2r^2}{\pi r^2}$$

$$P(A) = \frac{2}{\pi}$$

3- یک عدد دو رقمی طبیعی را انتخاب نموده احتمال آن را که عدد مضرب 4 باشد دریافت کنید.

حل: چون ما از عدد 10 الی 99 به تعداد 90 اعداد دو رقمی داریم. حال تعداد اعداد را به دست می آوریم که دو رقمی و هم مضرب عدد 4 باشند.

A: تعداد اعداد دو رقمی که مضرب 4 هستند:

ما میتوانیم اولاً فضای نمونه را تشکیل دهیم، بعداً اعدادی که دو رقمی و مضرب عدد 14 هستند تعیین کنیم و در اخیر تعداد شان را معلوم می‌نماییم:

10 , 11 , (12), 13 , 14 , 15 , (16), 17 , 18 , 19 , (20), 21 , 22 , 23 , (24), 25 , 26 , 27 , (28)
29 , 30 , 31 , (32), 33 , 34 , 35 , (36), 37 , 38 , 39 , (40), 41 , 42 , 43 , (44), 45 , 46 , 47
(48), 49 , 50 , 51 , (52), 53 , 54 , 55 , (56), 57 , 58 , 59 , (60), 61 , 62 , 63 , (64), 65 , 66
67 , (68), 69 , 70 , 71 , (72), 73 , 74 , 75 , (76), 77 , 78 , 79 , (80), 81 , 82 , 83 , (84), 85
86 , 87 , (88), 89 , 90 , 91 , (92), 93 , 94 , 95 , (96), 97 , 98 , 99 , 100

$$n(A) = \frac{99}{4} - \frac{9}{4} = \frac{99-9}{4} = \frac{90}{4}$$

$$n(S) = 10 \cdot 9 = 90$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\frac{90}{4}}{90} = \frac{1}{4}$$



فصل هشتم

عنوان درس: حوادث اتفاقی هم چانس

صفحهٔ کتاب (265-266)

وقت تدریس(1 ساعت درسی)

اهداف آموزشی **- دانشی** **- مهارتی** **- ذهنیتی**	• شاگردان مفهوم حوادث هم چانس را بدانند. • شاگردان سؤال‌های مربوط به حوادث هم چانس را حل کرده بتوانند. • شاگردان یک مثال زنده را از زنده‌گی روزمره در مورد حوادث هم‌چانس بگویند. • شاگردان به دانستن مفهوم حوادث هم چانس علاقه‌مندی پیدا کنند.
روش های تدریس	سؤال و جواب، کارهای گروهی و انفرادی
مواد ممد درسی	چارت شکل ورودی، مودل دانهٔ تاس(Dice)
توضیح ورودی **(5) دقیقه**	در قدم اول کارهای مقدماتی تدریس را که بعد از داخل شدن به صنف ضروری است انجام دهید بعداً توجه شاگردان را به طرف عنوان درس و چارت شکل ورودی معطوف سازید و از شاگردان بپرسید: • دانهٔ تاس را در نظر بگیرید و بگویید که: دانهٔ تاس دارای چند سطح می‌باشد و هر سطح آن با سطح دیگر چی فرق دارد؟ • آیا در سطوح تاس تعداد خال‌ها فرق ندارد و یا تعداد ایشان در تمام سطوح مساوی می‌باشد. • آیا عناصر فضای نمونهٔ تجربهٔ پرتاب تاس را نوشته کرده میتوانید. کوشش کنید تا جوابات درست را از شاگردان به دست آورید؛ برعلاوه آن به صورت مختصر معلومات ارائه کنید، شما میتوانید بااستفاده از دانهٔ تاس به سؤالات فوق جواب ارائه کنید.

فعالیت جریان درس(28) دقیقه

شاگردان را به گروه‌های مناسب تقسیم نمایید و به آنها وظیفه دهید تا فعالیت صفحهٔ 265 کتاب درسی را انجام دهند در جریان فعالیت از گروه‌ها نظارت نمایید تا تمام اعضای گروه در انجام فعالیت سهم فعال داشته باشند هرگاه مشکلی موجود باشد رهنمایی کنید. کوشش کنید تا جوابات درست را از شاگردان به دست آورید؛ برعلاوهٔ آن به طور مختصر معلومات دهید تا شاگردان تمام حوادث اتفاقی یک تجربهٔ را بشناسند. فضای نمونه تجربه را بنویسید در انجام تجربه احتمال هر حادثهٔ اتفاقی را به دست آورده بتوانند و بدانند که چانس وقوع حادثهٔ اتفاقی یک تجربه با حوادث دیگر برابر ا ست یا خیر؟ و آیا در تجربه حوادث وجود دارد که چانس وقوع آنها از دیگر حوادث بیشتر باشد و مجموع احتمالات وقوع حوادث اتفاقی یک تجربه مساوی به چی است؟ در ختم فعالیت از نمایندهٔ هر گروه

بخواهید تا به نماینده‌گی از گروه خویش پیش روی تخته رفته کار گروه خویش را به دیگران توضیح نمایند. در صورت بروز اشتباه آنها را رهنمایی نمایید. در اخیر فعالیت، تعریفی که در مورد حوادث هم چانس آمده به شاگردان توضیح نمایید. طوریکه شاگردان سهم فعال داشته باشند؛ سپس مثال صفحهٔ 266 را به شاگردان به شکل سؤال و جواب توضیح نمایند.

تحکیم درس(7) دقیقه

برای تحکیم درس نقاط مهم درس را به شاگردان توضیح نمایید و یک شاگرد داوطلب را پیش روی صنف بخواهید و سؤالات ذیل را بپرسید:

1. حوادث اتفاقی هم چانس را با ارائهٔ یک مثال تعریف نمایید.
2. هرگاه یک قطی دارای 2 مهرهٔ سیاه و 3 مهرهٔ سفید باشد و به صورت تصادفی از قطی یک مهره بگیریم، آیا چانس به دست آمدن مهرهٔ سیاه و مهرهٔ سفید باهم برابر اند؟
3. در موردمجموع احتمال تمام حوادث اتفاقی یک تجربهٔ مساوی به 1، مثال ارائه کنید.
4. کی میتواند حوادث اتفاقی اولیه و مرکب را با مثال تعریف نماید؟

کوشش نمایید تا از شاگردان جوابات درست را به دست آرید. در صورت امکان رهنمایی نمایید برای تحکیم درس میتوانید از معلومات اضافی درس استفاده نمایید.

ارزیابی ختم درس(5) دقیقه

برای اینکه مطمئن شوید که آیا شاگردان درس را فهمیده اند یا خیر؟ سؤالات ذیل را ازشاگردان بپرسید و کوشش کنید تا جوابات درست را به دست آورید:

1. حادثهٔ اتفاقی اولیه را تعریف کنید.
2. آیا در تجربهٔ پرتاب یک تاس آمدن شمارهٔ 2 یک حادثهٔ اتفاقی اولیه است یا خیر؟
3. آیا در تجربهٔ پرتاب یک سکه میتوانید احتمال (شیرآمدن) را محاسبه نماید؟
4. آیا در تجربهٔ پرتاب یک تاس حادثهٔ(آمدن شمارهٔ جفت) را حادثهٔ اتفاقی اولیه گفته میتوانیم؟

معلومات اضافی

حادثهٔ اتفاقی(Random event): حوادثی که ما دربارهٔ وقوع یا عدم وقوع آن پیش گویی قطعی کرده نتوانیم به نام حوادث اتفاقی یاد می‌شوند؛ مثلاً: در تجربهٔ پرتاب یک سکه ما در مورد حادثهٔ اتفاقی(شیر آمدن و یا خط آمدن) پیش‌گویی قطعی کرده نمیتوانیم؛ پس(شیر آمدن) یک حادثهٔ اتفاقی و خط آمدن یک حادثهٔ اتفاقی دیگری می‌باشد.

- **حوادث هم چانس(Equally likely events)**: هرگاه در یک تجربه چانس وقوع یک حادثه بیشتر از حادثهٔ دیگر نباشد در این صورت تمام حوادث تجربه را حوادث اتفاقی هم چانس گویند؛ مثلاً: در تجربهٔ پرتاب یک تاس حوادث 1,2,3,4,5,6 دارای چانس مساوی می‌باشند.
- **حادثهٔ اتفاقی اولیه(Preliminary event):** هرگاه یک حادثهٔ اتفاقی یک عنصر از فضای نمونه را به خود اختیار کند به نام حادثهٔ اتفاقی اولیه یاد می‌شود.

- **حادثهٔ مرکب(Compound event):** هرگاه یک حادثهٔ اتفاقی یک تجربه بتوانند چندین عناصر فضای نمونه را به خود اختیار کند، حادثهٔ مذکور به نام حادثهٔ اتفاقی مرکب یاد میشود.

مثلاً: در تجربهٔ پرتاب یک تاس حادثهٔ آمدن شمارهٔ جفت 3 عنصر فضای نمونه را در بر میگیرد $\{2,4,6\}$.

- **حالات ممکنه(Possible outcomes):** هر تجربه دارای یک تعداد حالات ممکنه می‌باشد تعداد حالات ممکنه به n نشان داده می‌شود؛ مثلاً: در تجربهٔ پرتاب یک تاس حالات ممکنهٔ آن عبارت است از: 1,2,3,4,5,6
- در تجربهٔ پرتاب یک سکه تعداد حالات ممکنهٔ 2 می‌باشد.

حالاتی که حادثهٔ اتفاقی به وقوع می‌پیوندد به نام حالات مساعد یاد می‌شود.

احتمال یک حادثهٔ اتفاقی(Probability of an event) را توسط فورمول ذیل محاسبه می کنیم:

$$P(A)=\frac{m\ (\text{تعداد حالات مساعد}=m)}{n\ \ (\text{تعداد حالات ممکنه}=n)}$$

احتمال یک حادثهٔ اتفاقی همیشه بین صفر و یک می‌باشد: $0\le P(A)\le 1$

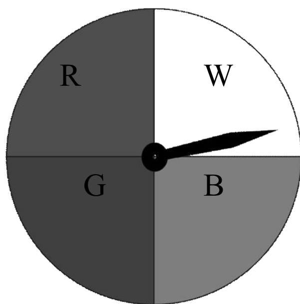
- برای به دست آوردن $P(A)$ یعنی احتمال حادثهٔ اتفاقی A ما رابطهٔ ذیل را به کار می‌بریم:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}$$

- در فورمول فوق $n(A)$ تعداد عناصر فضای نمونه را نشان میدهد که شامل حادثهٔ اتفاقی A می‌شود و $n(S)$ تعداد تمام عناصر فضای نمونه را نشان میدهد.
- احتمال در فضای نمونهٔ گسسته به نام احتمال کلاسیک هم یاد می‌شود.

جواب به سؤال های تمرین

1- شکل مقابل را در نظر گرفته وبگویید هرگاه احتمال ایستادن عقربه بالای رنگ آبی و سفید 0.30 و روی رنگ سرخ 0.26 باشد احتمال آن که روی رنگ سبز ایستاده شود چند است؟



حـــل : چون احتمال یک حادثهٔ اتفاقی بین 0 و 1 است؛ یعنی $0\le p(A)\le 1$ می باشد و مجموع احتمال حوادث یک تجربه مساوی به 1 است پس :

$$P(BW)+P(R)=0.30+0.23=0.56$$
$$P(BW)+P(G)+P(R)=1$$
$$P(G)=1-P(R)-P(BW)$$
$$=1-0.26-0.30$$
$$\boxed{P(G)=0.44}$$

2- جدول کثرت زیر را برای انداختن یک دانهٔ تاس در نظر بگیرید، دریافت کنید احتمال آنرا که دانهٔ رمل شماره 5 آید.

شماره رمل	1	2	3	4	5	6
کثرت	7	9	8	7	3	10

حل :

A: حادثهٔ اتفاقی آمدن شماره 5 با استفاده از فورمول کثرت نسبی احتمال حادثه اتفاقی A را به دست می آوریم.

k: تعداد پرتاب دانهٔ تاس

n: تعداد حوادث اتفاقی آمدن شمارهٔ 5

$$K = 7+9+8+7+3+10 \qquad P(A) = \frac{n}{k}$$

$$\boxed{K = 44} \qquad P(A) = \frac{3}{44} = 0.06$$

3- یک دانه رمل طوری پرکاری شده است که احتمال آمدن شمارهٔ جفت دو چند شماره های تاق است، احتمال آنرا که اگر کسی طی شرطی، شمارهٔ 5 تاس را انتخاب کرده باشد دریافت کنید؟

حل :

$A =$ حادثه اتفاقی جفت آمدن شماره تاس

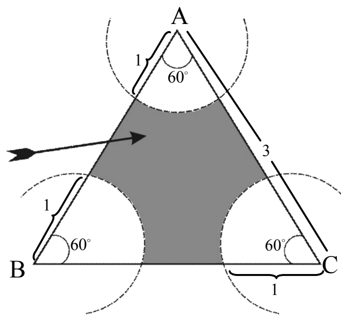
$B =$ حادثه اتفاقی تاق آمدن شمارهٔ تاس

$2x =$ حالات مساعد برای جفت آمدن شمارهٔ تاس

$x =$ حالات مساعد برای تاق آمدن شمارهٔ تاس

تمام حالات ممکنه $= x + 2x = 3x$

احتمال حادثهٔ اتفاقی 5 آمدن شمارهٔ تاس $= P(5) = \dfrac{\text{حالات مساعد}}{\text{حالات ممکنه}} = \dfrac{x}{3x} = \dfrac{1}{3}$



فصل هشتم

عنوان درس: احتمال فضاهای پیوسته

صفحهٔ کتاب (267–268)

وقت تدریس(1 ساعت درسی)

اهداف آموزشی **- دانشی** **- مهارتی** **- ذهنیتی**	• شاگردان مفهوم فضای نمونهٔ پیوسته(Continuous sample space) را بدانند. • شاگردان احتمال فضای نمونهٔ پیوسته را محاسبه کرده بتوانند. • شاگردان با درک موضوع احتمال فضای نمونهٔ پیوسته احساس خوشی نمایند.
روش های تدریس	سؤال و جواب، کارهای گروهی و انفرادی
مواد ممد درسی	چارت شکل ورودی، مودل دانهٔ تاس(Dice)
توضیح ورودی **(5) دقیقه**	در قدم اول کارهای مقدماتی تدریس را که بعد از داخل شدن به صنف ضروری است انجام دهید بعداً به توضیح درس اقدام کنید. چارت شکل ورودی را که از قبل تهیه نموده اید پیش روی صنف آویزان نمایید و از شاگردان بپرسید: • درشکل چی می‌بینید؟ • احتمال آنکه نقطهٔ اصابت تیر در داخل مثلث متساوی‌الاضلاع به اندازهٔ 1 واحد از راس‌های مثلث باشد چند است. • برای به دست آوردن احتمال حادثهٔ فوق به کدام نوع فضای نمونه ضرورت داریم؟ بعد از اخذ جوابات شکل بخش ورودی را طوری ذیل توضیح نمایید. در شکل یک مثلث متساوی‌الاضلاع را مشاهده می‌کنید که طول هر ضلع مثلث 3 واحد می‌باشد. نظر به شرط متن ورودی ما ساحهٔ داخل مثلث به اندازهٔ 1 واحد دور از راس‌های مثلث را در نظر می‌گیریم چون برای حل سؤال ما از مساحت مثلث استفاده می‌نماییم؛ بنا بر آن به فضای نمونهٔ پیوسته نیاز داریم.

فعالیت جریان درس(28) دقیقه

شاگردان را به گروه‌های مناسب تقسیم نموده و به آنها وظیفه دهید تا فعالیت صفحهٔ 267 کتاب درسی را انجام دهند. در جریان فعالیت از گروه‌ها نظارت نمایید تا تمام اعضای گروه در اجرای فعالیت سهم فعال داشته باشند در جریان فعالیت به شاگردان رهنمایی نمایید تا بااستفاده از بکس هندسی شکل را ترسیم نمایند و رابطه بین مساحت‌های A و S را بررسی کنند، هرگاه مساحت‌های A و S را در نظر گیریم. نسبت مذکور را چی می‌نامند.

آیا میتوانید به عوض مساحت‌های A و S از احجام استفاده نماید.

احجام و مساحت‌ها به کدام نوع فضای نمونه ارتباط دارند در ختم فعالیت نماینده یک گروه را بخواهید تا کار

گروهی خویش را پیش روی تخته توضیح نمایند، درصورت بروز اشتباه رهنمایی نمایید، طوریکه در شکل ساحۀ A مساحت فرعی ساحه S می‌باشد ما در فضای نمونۀ پیوسته از احجام مساحت‌ها و فواصل را بررسی می کنیم.
برای اینکه چگونه میتوانیم احتمال فضای نمونۀ پیوسته را محاسبه نماییم، نتایج فعالیت را به شاگردان توضیح نمایید، بعداً مثال اول صفحۀ 267 کتاب درسی را روی تخته نوشته و انتروال‌ها را روی محور اعداد حقیقی تعیین نمایید و با سهم فعال شاگردان مثال مذکور را حل نمایید.

تحکیم درس(7) دقیقه

برای تحکیم درس مثال دوم صفحۀ 268 کتاب درسی را روی تخته بنویسید و از یک شاگرد داوطلب بخواهید تا مثال را حل نماید و همزمان از شاگردان دیگر بخواهید که مثال متذکره را در کتابچه‌های شان حل نمایند هرگاه در حل مثال روی تخته کدام اشتباه موجود بود توسط یک شاگرد دیگر تصحیح نمایید، زمانیکه مطمئن شدید که حل روی تخته اشتباه ندارد از شاگردان بخواهید تا طریقۀ حل کتابچه‌های شان را با حل روی تخته مقایسه نمایند این کار کمک میکند تا شاگردان اشتباه شان را درک کنند.

ارزیابی ختم درس(5) دقیقه

برای اینکه مطمئن شوید که شاگردان درس را فهمیده اند یا خیر؟ ازشاگردان سؤالات ذیل را بپرسید:

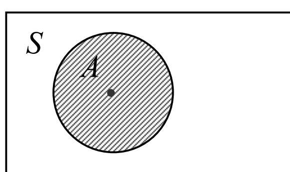
1. یک مثال دربارۀ فضای نمونۀ پیوسته بیان کنید.
2. چگونه میتوانیم احتمال فضای نمونۀ پیوسته را محاسبه کنیم؟
3. آیا فضای نمونۀ پیوسته شامل مساحت‌ها، احجام و محور اعداد حقیقی میشود یا خیر؟

معلومات اضافی در مورد سؤالات ارزیابی در بخش معلومات اضافی درس موجود می‌باشد.

معلومات اضافی

فضای نمونۀ پیوسته(Probability of continues sample space): احتمال فضای نمونه که عناصر آن قابل شمارش نباشد به نام احتمال فضای نمونۀ پیوسته یاد می‌شود.
در درس از فضای نمونۀپیوسته مثال‌های را یاد آوری میکنیم که دارای شکل هندسی محدود باشد؛ یعنی طول، مساحت و حجم که به $m(S)$ نشان داده می‌شود. هرگاه فضای نمونۀ پیوسته را به S نشان دهیم و یک نقطۀ را تصادفاً در فضای نمونۀ S انتخاب کنیم احتمال اینکه نقطۀ مربوطه ناحیه A باشند به طور ذیل محاسبه می کنیم:

$$P(A)=\frac{\text{طول } A}{\text{طول } S}\ ,\quad P(A)=\frac{\text{مساحت } A}{\text{مساحت } S}\ \text{یا}\ P(A)=\frac{\text{حجم } A}{\text{حجم } S}$$



فضای نمونهٔ پیوسته مجموعه‌های نامتناهی می‌باشد مانند انتروال‌ها در اعداد حقیقی یا سطوح درصفحه وغیره. واضح است که در این حالت دیگر شمارش عناصر فضای نمونه ممکن نیست؛ پس در فضاهای پیوسته ما اندازهٔ طول انتراول‌ها، مساحت سطوح و حجم اشکال هندسی را در نظر می گیریم در این حالت نسبت اندازهٔ فضای حادثه(حالات مساعد) بر اندازهٔ فضای نمونه به نام احتمال حادثهٔ اتفاقی را نشان میدهد؛ مثلاً:

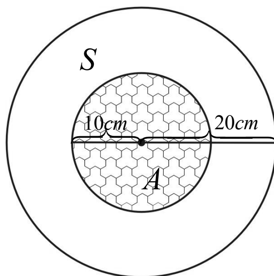
اگر $S \subset R^2$ و A داشته باشیم $\quad P(A) = \dfrac{A\ \text{سطح}}{S\ \text{سطح}}$

اگر $S \subset R^2$ و $A \neq S$ داشته باشیم $P(A) = \dfrac{A\ \text{حجم}}{S\ \text{حجم}}$

مثال: شعاع صفحه هدف $20cm$ و شعاع دایرهٔ کوچک $10cm$ است، فرض می کنیم تیر حتماً به صفحهٔ برخود می کند احتمال برخود تیر به دایرهٔ کوچکتر را محاسبه کنید.

حل: فضای نمونهٔ مساحت دایره بزرگتر می‌باشد و حادثهٔ A مساحت دایرهٔ کوچکتر می‌باشد بنا بر این:

$$P(A) = \frac{a_A}{a_S} = \frac{\pi(10)^2}{\pi(20)^2} = \frac{1}{4}$$

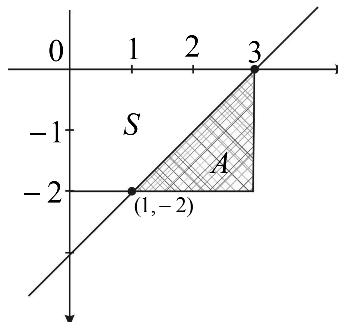


جواب به سؤال های تمرین

1- روی محور اعداد حقیقی دو نقطه A و B را به صورت اتفاقی انتخاب می نماییم طوری که $-2 \leq B \leq 0$ و $\text{O} \leq \text{A} \leq 3$ باشد، مطلوب است احتمال آن که فاصله d بین نقاط A و B بزرگتر از 3 واحد باشد.

حل: فضای نمونه S از جوره های مرتب (a, b) تشکیل شده طوریکه دارای دو متحول می باشد؛ پس چون دو بعدی است از سیستم مختصات قایم کمیات وضعیه استفاده می کنیم.

و با استفاده از مستطیل که در شکل داده شده است در فضای نمونه $d = 3(a-b)$ نقاط شامل است که تحت خط $x - y = 3$ موجود اند چون سطح A شکل مثلث قایم الزاویه را و S شکل مستطیل را دارا میباشد پس نظر به فورمول مساحت مستطیل و فورمول مساحت مثلث داریم که:



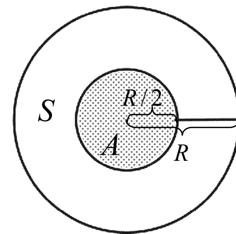
$$P(A) = \frac{A\ \text{مساحت سطح}}{S\ \text{مساحت سطح}}$$

$$P(A) = \frac{\frac{1}{2}(2\cdot 2)}{2\cdot 3} = \frac{1}{3}$$

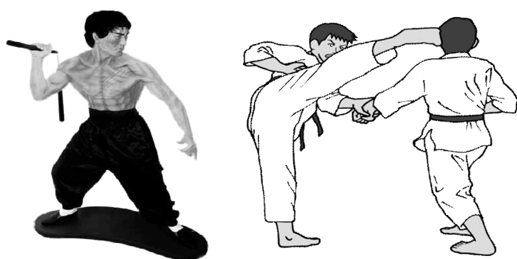
2- هرگاه یک نقطه را به صورت تصادفی روی سطح یک دایره انتخاب نماییم احتمال آن که نقطهٔ مذکور بـه مرکـز دایره نزدیکتر از محیط آن باشد دریافت کنید.

حل: یک دایره را باشعاع $r=1$ ترسیم می کنیم S مجموع تمام نقاط است که در داخل دایره واقع اند و ساحهٔ A تمام نقاط است که در داخل دایره متحدالمرکز با شعاع $\frac{r}{2}$ می باشد ناحیه A ست فرعی ناحیه S می باشد. احتمال اینکه نقطه انتخاب شده نظر به محیط دایره نزدیک به مرکز دایره واقع باشد به شکل زیر محاسبه می کنیم:

$$P(A)=\frac{A \text{ مساحت}}{S \text{ مساحت}}=\frac{\pi(\frac{r}{2})^2}{\pi r^2}=\frac{\pi\cdot\frac{r^2}{4}}{\pi r^2}=\frac{1}{4}=0.25$$



25 فیصد احتمال وجود دارد که نقطهٔ انتخاب شده نزدیک مرکز دایره واقع باشد.



فصل هشتم

عنوان درس: احتمال مشروط

صفحهٔ کتاب (269-270)

وقت تدریس(2 ساعت درسی) ساعت اول درسی

اهداف آموزشی **- دانشی** **- مهارتی** **- ذهنیتی**	• شاگردان مفهوم احتمال مشروط را بدانند و هر جزء از فورمول احتمال را تعریف کنند. • شاگردان سؤالات و مثال‌های مربوط به درس را حل کرده بتوانند. • شاگردان با آوردن مثال‌های زنده در مورد احتمال مشروط احساس خوشی کنند.
روش های تدریس	سؤال و جواب، کارهای گروهی و انفرادی
مواد ممد درسی	مواد که برای تدریس بهتر لازم میدانید.
توضیح ورودی **(5) دقیقه**	در قدم اول کارهای مقدماتی تدریس را که بعد از داخل شدن به صنف ضروری است انجام دهید بعداً توجه شاگردان را به عنوان درس و چارت شکل ورودی معطوف سازید و به توضیح ورودی اقدام نمایید با استفاده از چارت شکل ورودی سؤالات ذیل را از شاگردان بپرسید: • درشکل چی می‌بینید؟ • هرگاه از جمله 15 نفر 1 نفر را به صورت تصادفی انتخاب نماییم احتمال اینکه نفر انتخاب شده کاراته باز و از طبقهٔ ذکور باشد، چند است؟ • نفر انتخاب شده یک دختر کاراته باز باشد. در جملات فوق شرایط دیده می‌شود. برای محاسبهٔ احتمال این چنین حوادث از فورمول احتمال مشروط استفاده می‌نماییم. حل ورودی و معلومات دربارهٔ احتمال مشروط در بخش معلومات اضافی درس موجود اند شما میتوانید برای توضیح بهتر ورودی از معلومات اضافی درس استفاده نمایید.

فعالیت جریان درس(28) دقیقه

شاگردان را به گروه‌های مناسب تقسیم نموده وظیفه دهید تا فعالیت صفحهٔ 269 کتاب درسی را انجام دهند. در جریان فعالیت از گروه‌ها نظارت نمایید تا تمام اعضای گروه در انجام فعالیت سهم فعال داشته باشند. کوشش کنید تا شاگردان بتوانند سؤالات موجود را در آخر فعالیت را حل کنند، در صورت بروز اشتباه کمک و رهنمایی کنید. در ختم فعالیت نمایندهٔ هر گروه را بخواهید تا کار گروه خویش را به دیگران توضیح دهند. در وقت توضیح رهنمایی کنید. برای اینکه چگونه احتمال مشروط یک حادثهٔ اتفاقی را محاسبه کنیم، برای این کار تعریف موجود در آخر فعالیت صفحهٔ 270 را به شاگردان توضیح دهید؛ طوریکه شاگردان سهم فعال داشته باشند؛ ذیلاً توضیح دهید و بپرسید:

$P(R \cap M)$ احتمال کدام حوادث اتفاقی است؟

$P(R)$ احتمال کدام حادثۀ اتفاقی می باشد؟

$P_R(M)$ احتمال مشروط کدام حادثۀ می‌باشد؟

$P_R(F)$ احتمال مشروط کدام حادثۀ می‌باشد؟

$P(R \cap F)$ احتمال کدام حوادث اتفاقی را نشان میدهد؟

کوشش کنید تا جواب درست را از شاگردان به دست آرید؛ برعلاوۀ آن میتوانید با استفاده از معلومات اضافی توضیح دهید.

تحکیم درس(7) دقیقه

برای تحکیم درس نکات مهم درس باید تکرار شوند:

1. احتمال مشروط را تعریف نمایید.
2. فورمول احتمال مشروط یک حادثۀ اتفاقی، چیست؟

نوت:

$P(R)$ احتمال اینکه شاگرد به مطالعه عادت دارد.

$P(R \cap M)$ احتمال اینکه شاگرد یک پسر باشد و به مطالعه عادت باشد.

$P_R(M)$ احتمال اینکه شاگرد یک دختر باشد و به مطالعه عادت باشد.

ارزیابی ختم درس(5) دقیقه

برای اینکه مطمئن شوید که آیا شاگردان درس جدید را فرا گرفته اند یا خیر؟سؤالات ذیل را از شاگردان بپرسید و کوش کنید تا جواب درست را از شاگردان به دست آرید:

1. احتمال مشروط را تعریف و در مورد یک مثال ارائه کنید.
2. آیا مساوات $P_B(A) = P_A(B)$ درست است؟
3. آیا میتوانید احتمال مشروط حادثۀ اتفاقی شماره 6 آمدن در تجربۀ پرتاب تاس را محاسبه کنید در صورتیکه حادثۀ اتفاقی آمدن شمارۀ جفت قبلاً به وقوع پیوسته باشد.

معلومات اضافی

حل فعالیت: فیصدی آنعده شاگردان که به مطالعه عادت دارند: $\frac{1600}{2500} \times 100 = 61\%$

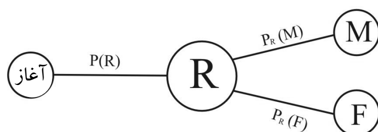
فیصدی آنعده شاگردان طبقۀ ذکور که به مطالعه عادت دارند: $P(R \cap M) = 0.7 \quad , \quad 70\%$

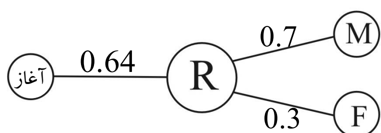
فیصدی آنعده شاگردان طبقۀ اناث که به مطالعه عادت دارند: $P(R \cap F) = 0.3 \quad , \quad 30\%$

$P_R(M) =$ احتمال اینکه شاگردان انتخاب شده از جملۀ مطالعه کننده‌گان از طبقۀ ذکور باشند پیدا کنید.

$P_R(F) =$ احتمال اینکه شاگردان انتخاب شده از جملۀ مطالعه کننده‌گان از طبقۀ اناث باشند پیدا کنید.

حل: میدانیم که شکل دیاگرام درختی ذیل است:





$$P(R\cap M)=0.7\times 0.64=0.449$$

$$P(R\cap F)=0.64\times .3=0.192$$

$$P_R(M)=\frac{0.449}{0.64}=0.7\ ,\quad 70\%$$

$$P_R(F)=\frac{0.192}{0.64}=0.3\ ,\quad 30\%$$

میخواهیم مفهوم احتمال مشروط را درک کنیم احتمال مشروط حادثۀ اتفاقی A نظر به B، طوریکه B قبلاً به وقوع پیوسته باشد توسط فورمول ذیل محاسبه میکنیم:

$$P_B(A)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

مثال: در یک تجربۀ پرتاب تاس معلومات به دست می‌آوریم که شمارۀ تاس جفت است، احتمال مشروط حادثۀ اتفاقی که شمارۀ تاس بزرگتر از 3 باشد به دست آورید.

حل: ست‌های ذیل را در نظر می گیریم:

فضای نمونه پرتاب تاس $S=\{1,2,3,4,5,6\}$

حادثۀ اتفاقی آمدن شمارۀ جفت روی تاس $A=\{2,4,6\}$

حادثۀ اتفاقی که شمارۀ بزرگتر از 3 باشد: $B=\{4,6\}$

حادثۀ اتفاقی که شمارۀ تاس جفت و بزرگتر از 3 باشد: $A\cap B=\{4,6\}$

میدانیم که احتمال آمدن هر شمارۀ تاس $\frac{1}{6}$ می‌باشد.

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{3}{6}\ ,\quad P(A\cap B)=\frac{n(A\cap B)}{n(S)}=\frac{2}{6}$$

ما احتمال مشروط اینکه شمارۀ به دست آمده جفت و بزرگتر از 3 باشد طوری ذیل است:

$$P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{2}{6}}{\frac{3}{6}}=\frac{2}{3}$$

یادداشت

I) $0\le P_B(A)\le 1$

II) $P_B(S)=1\quad \because S\cap B=B\ ,\quad P_B(S)=\frac{P(S\cap B)}{P(B)}=\frac{P(B)}{P(B)}=1$

III) $P_B(A_1\cup A_2)=P_B(A_1)+P_B(A_2)$

تعریف: هرگاه A و B دو حادثهٔ اتفاقی ناسازگار(mutually exclusive events) باشد؛ یعنی حوادث A و B همزمان رخ ندهد و برعکس(در تجربهٔ پرتاب سکه هر سکه به روی خط آید حادثهٔ اتفاقی شیر آمدن سکه رُخ نمیدهد و برعکس)

مثال: احتمال اینکه روز اول ماه حمل باران ببارد 0.5 می‌باشد و احتمال اینکه روز اول دوم ماه حمل باران ببارد 0.4 است. در روز اول ماه حمل باران می‌بارد، احتمال اینکه روز دوم ماه حمل باران ببارد، پیدا کنید.

حل: هرگاه A حادثهٔ اتفاقی باریدن روز اول ماه حمل و B باریدن باران روز دوم ماه حمل را نشان دهد.

$P(A)=0.5$ احتمال باریدن باران روز اول ماه حمل

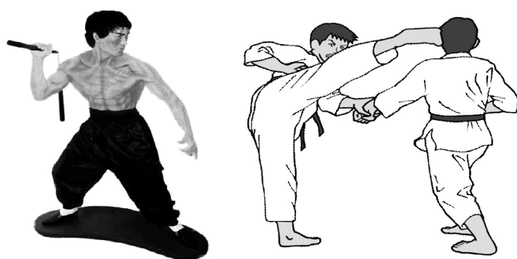
$P(A\bigcap B)=0.4$ احتمال باریدن روز اول و دوم ماه حمل

$$P(A)=0.5$$
$$P(A\bigcap B)=0.4$$
$$P_A(B)=?$$

با استفاده از تعریف مشروط داریم که:

$$P_A(B)=\frac{P(A\bigcap B)}{P(A)}$$
$$P_A(B)=\frac{0.4}{0.5}=0.80$$

80% احتمال موجود است که به روز دوم ماه حمل باران ببارد.



فصل هشتم

عنوان درس: احتمال مشروط

صفحۀ کتاب (270–272)

وقت: ساعت دوم درسی

اهداف آموزشی **- دانشی** **- مهارتی** **- ذهنیتی**	• شاگردان مفهوم احتمال مشروط و فورمول آن را بشناسند. • شاگردان مثال‌ها و سؤالات مربوط درس را حل کرده بتوانند. • شاگردان در مورد احتمال مشروط یک مثال زنده را از زنده‌گی روزمره آورده و احساس خوشی نمایند.
روش های تدریس	سؤال و جواب، کارانفرادی
مواد ممد درسی	مواد که برای تدریس بهتر لازم میدانید.
توضیح ورودی (5) دقیقه	ورودی درس ساعت اول احتمال مشروط را تکرار کنید.

فعالیت جریان درس(28) دقیقه

در صفحۀ 270 کتاب درسی بعد از تعریف، فورمول بیز داده شده است، شما میتوانید با استفاده از تعریف احتمال مشروط آن را ثبوت کنید و فورمول بیز را به دست آرید، طوریکه دیاگرام صفحۀ 270 را روی تخته رسم نموده و با استفاده از دیاگرام مفهوم احتمال مشروط را به شاگردان واضح سازید؛ طوریکه شاگردان سهم فعال داشته باشند در وقت ثبوت قضیه گام به گام با سهم فعال شاگردان کارکنید تا شاگردان هر مرحلۀ ثبوت قضیه را بهتر درک کنند. قضیه را به شکل سؤال و جواب از شاگردان ثبوت کنید طوریکه در قدم اول با استفاده از دیاگرام احتمال مشروط یک حادثۀ اتفاقی را به دست آورید، بعداً احتمال مشروط حادثۀ اتفاقی A نظر به حوادث B و $\overline{B}$ را واضح سازید. در مرحلۀ سوم واضح سازید که حادثۀ اتفاقی A زمانی رخ میدهد که هرگاه یکی از حوادث $B_1, B_2, \ldots, B_n$ به وقوع پیوسته باشند؛ پس فورمول احتمال مشروط حادثۀ اتفاقی A نظر به حوادث $B_1, B_2, \ldots, B_n$ بنویسید به این روش شما فورمول بیز را به دست می‌آورید بعد از ثبوت قضیۀ مراحل به دست آوردن فورمول بیز را مختصراً تکرار کنید. یک شاگرد داوطلب را پیش روی تخته بخواهید تا مراحل به دست آوردن فورمول بیز را توضیح دهید.

تحکیم درس(7) دقیقه

برای تحکیم درس مثال صفحۀ 271 کتاب درسی را روی تخته نوشته و دیاگرام درختی گراف آنرا ترسیم نمایید، بااستفاده از دیاگرام درختی احتمال مشروط حادثۀ اتفاقی را به‌دست آورید؛ طوریکه شاگردان سهم فعال داشته باشند.

ارزیابی ختم درس(5) دقیقه

برای اینکه مطمئن شوید آیا شاگردان درس جدید را فرا گرفته اند یا خیر؟سؤالات ذیل مربوط به درس را از شاگردان بپرسید و کوشش کنید تا جواب درست را از شاگردان به دست آرید:

1. احتمال مشروط را تعریف و فورمول آنرا بنویسید.
2. در مودر احتمال مشروط یک مثال زنده را ارائه کنید.
3. آیا رابطهٔ $P_B(A) = P_B(B)$ درست است؟
4. چی وقت میتوانیم از فورمول بیز استفاده کنیم؟
5. آیا متیوانید احتمال مشروط حادثهٔ A را نظر به حوادث اتفاقی B_1 و B_2 بنویسید؟

معلومات اضافی

تیوری حاصل جمع دو حادثهٔ ناسازگار(*Addition law of mutually exclusive events*): ما در درس گذشته یادآوری کردیم که هرگاه دو حادثهٔ ناسازگار(***mutually exclusive***) باشد در جریان تجربه همزمان رُخ نمیدهند؛ پس:

$$A \cap B = \phi$$
$$P(A \cap B) = P(\phi) = 0$$

نظر به تیوری در حوادث ناسازگار(***mutually exclusive events***): فورمول ذیل صدق می کند.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

ثبوت(Proof): هرگاه فضای نمونه یک تجربه دارای n عناصر باشد و m_1 تعداد حالات مساعد حادثهٔ A باشد و m_2 تعداد حالات مساعد حادثهٔ B باشد؛ پس احتمال حادثهٔ A این طوری است: $P(A) = \frac{m_1}{n}$

و احتمال حادثهٔ B: $P(B) = \frac{m_2}{n}$

چون حوادث A و B ناسازگار(***mutually exclusive events***) اند؛ پس حالات مساعد مشترک ندارند و حالات مساعد که مربوط $A \cup B$ می‌شود $m_1 + m_2$ اند نظر به احتمال یک حادثهٔ اتفاقی داریم که:

$$P(A \cup B) = \frac{\text{تعداد حالات مساعد که شامل حادثهٔ } A \cup B \text{ می‌شوند}}{\text{تعداد حالت که شامل فضای نمونه اند}}$$
$$= \frac{m_1 + m_2}{n} = \frac{m_1}{n} + \frac{m_2}{n} = P(A) + P(B)$$
$$\Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

تیوری بیز(*Bays theorem*): هرگاه حوادث اتفاقی $A_1, A_2, \dots, A_k$ شامل فضای نمونهٔ S باشد و A_i , $(i = 1, \dots k)$ حوادث ناسازگار(***mutually exclusive events***) باشند؛ پس اتحاد این حوادث مساوی به فضای نمونهٔ S می‌باشند.

هرگاه از فضای نمونه یک حادثه دیگر B را در نظر گیریم حادثهٔ B زمان رخ می‌دهد، هرگاه یک از حوادث A_i قبلاً رخ دهد؛ پس طور ذیل محاسبه می‌شود:

$$P_B(A_i) = \frac{P(A_i) \cdot P_{A_i}(B)}{\sum_{i=1}^{k} P(A_i) \cdot P_{A_i}(B)}$$

ثبوت: میدانیم که:

$$P_{A_i}(B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} \quad \Rightarrow P(A_i \cap B) = P(B) \cdot P_{A_i}(B)$$

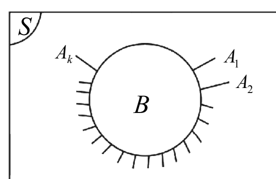
$$P(A_i \cap B) = P(B) \cdot P_{A_i}(B)$$

$$P(A_i \cap B) = P(A_i) \cdot P_{A_i}(B)$$

با استفاده از تساوی رابطهٔ فوق $P_{A_i}(B)$ به دست می‌آوریم:

$$P_B(A_i) = \frac{P(A_i) \cdot P_{A_i}(B)}{P(B)} \text{ .... I}$$

ما میتوانیم حادثهٔ B را شکل II ...... $B = S \cap B$ بنویسیم(نظر به دیاگرام وین):



د وین دیاگرام

طوریکه در آغاز تیوری مشاهده کردیم که: $S = A_1 \cup A_2 \ \dots \cup A_k$

قیمت S را در رابطهٔ II وضع می‌کنیم $B = (A_1 \cup A_2 \cup \ \dots \ \cup A_k) \cap B$

$$B = (A_1 \cup A_2 \cup \ \dots \ \cup A_k) \cap B$$

$$B = (A_1 \cap B)(A_2 \cap B) \cup \ \dots \ \cup (A_k \cap B)$$

نظر به تیوری حاصل جمع که در آغاز یادآور شدیم:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \ \dots \ + P(A_k \cap B)$$

نظر به فورمول احتمال مشروط $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ داریم که:

$$P(B) = P(A_1) \cdot P_{A_i}(B) + P(A_2) \cdot P_{A_2}(B) + \ \dots \ + P(A_k) \cdot P_{A_k}(B)$$

$$P(B) = \sum_{i=1}^{k} P(A_i) \cdot P_{A_i}(B)$$

قیمت $P(B)$ را در رابطهٔ I وضع می‌کنیم، داریم که:

$$P_B(A_i) = \frac{P(A_i) \cdot P_{A_i}(B)}{\sum_{i=1}^{k} P(A_i) \cdot P_{A_i}(B)}$$

فورمول فوق به نام فورمول بیز یاد می‌شود.

جواب به سؤال های تمرین

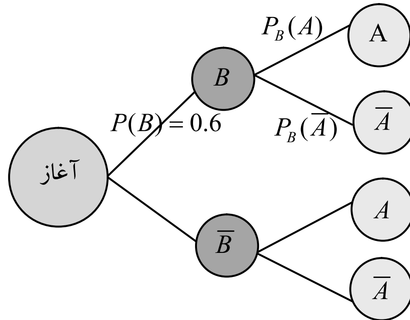
با استفاده از دیاگرام زیر برای احتمال مشروط به وقت معینه رسیدن به مکتب به شرط این که به وسیلهٔ سرویس صورت گرفته باشد. یعنی $P_A(B)$ و احتمال حادثهٔ اتفاقی به وقت معینه رسیدن به مکتب به شرط آن که به وسیله سرویس نیامده باشد، یعنی $P_{\overline{A}}(B)$ مطلوب است.

حل:

A = به وسیلهٔ گادی رفتن

B = به وقت معینه رسیدن

$\overline{A}$ = به وسیلهٔ گادی نرفتن



$P(A) = 0.5$

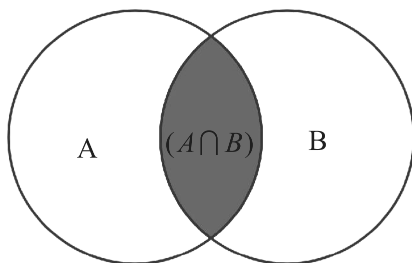
$P(B) = 0.7$

$P_B(A) = 0.6$

$$P_B(A) = \frac{P(B) \cdot P_B(A)}{P(A)}$$

$$P_{\overline{A}}(B) = \frac{P(B) \cdot P_B(\overline{A})}{P(A)}$$

$$P_{\overline{A}}(B) = \frac{0.6 \cdot 0.4}{0.3} = 0.8$$



فصل هشتم

عنوان درس: اصل حاصل ضرب

صفحهٔ کتاب (273-274)

وقت:(2 ساعت درسی) ساعت اول درسی

اهداف آموزشی **- دانشی** **- مهارتی** **- ذهنیتی**	• شاگردان مفهوم اصل حاصل ضرب را بدانند. • شاگردان اصل حاصل ضرب را در احتمال حوادث مستقل و احتمال حوادث مشروط به کار برده بتوانند. • شاگردان از زنده‌گی روزمرهٔ خود مثال‌های زنده را بگویند که اصل حاصل ضرب در آن به کار برده شود و احساس خوشی مایند.
روش های تدریس	سؤال و جواب، کارگروهی و کارانفرادی
مواد ممد درسی	چارت شکل ورودی.
توضیح ورودی **(5) دقیقه**	در قدم اول کارهای مقدماتی تدریس که بعد از داخل شدن به صنف ضروری است انجام دهید، چارت شکل ورودی را که از قبل تهیه نموده اید، پیش‌روی تخته آویزان نمایید ویا میتوانید شکل ورودی را روی تخته ترسیم کرده و به توضیح آغاز نمایید، طوریکه از شاگردان بپرسید: 1. در شکل چی می بینید؟ 2. آیا میتوانید فورمول احتمال مشروط را بنویسید؟ کوشش نمایید تا جواب درست را از شاگردان به دست آورید برعلاوهٔ آن میتوانید در مورد ورودی طوری ذیل توضیحات دهید: شما در شکل، دو دایره را مشاهده می‌کنید که توسط حروف A و B نامگذاری شده اند، هرگاه A و B دو ست را نشان دهد ما در دوایر A و B بعضی قسمت های مشترک را مشاهده می‌کنیم که توسط $A\cap B$ نشان داده شده است. اگر حالات A و B دو حادثهٔ اتفاقی را نشان دهد، قسمت‌های مشترک A و B نشان میدهد که حوادث A و B بالای یکدیگر تأثیر دارند و همزمان رخ میدهند. برای محاسبهٔ احتمال چنین حوادث از احتمال مشروط استفاده می‌کنیم و هرگاه حوادث A و B بالای یکدیگر تأثیر نداشته باشد میگوییم که حوادث A و B مستقل اند. برای معلومات بیشتر به معلومات اضافی درس مراجعه کنید.

فعالیت جریان درس(28) دقیقه

شاگردان را به گروه‌های مناسب تقسیم نموده و به آنها وظیفه دهید تا فعالیت صفحهٔ 273 را انجام دهند. در جریان

کار گروهی از گروه‌ها نظارت کنید تا تمام اعضای گروه در اجرای فعالیت سهم فعال داشته باشند در جریان فعالیت به شاگردان رهنمایی نمایید که فعالیت با استفاده از درس گذشته(احتمال مشروط) انجام داده شود، بعداً نمایندهٔ یک گروه را بخواهید تا کار گروهی خویش را به دیگران توضیح دهد. هرگاه در وقت توضیح کدام اشتباه رخ دهد اصلاح کنید؛ سپس نتیجهٔ فعالیت را به سهم فعال شاگردان به شکل سؤال و جواب توضیح دهید.

تحکیم درس(7) دقیقه

برای تحکیم درس تا شاگردان مفهوم(اصل حاصل ضرب) را بدانند مثال صفحهٔ 274 را با سهم فعال شاگردان روی تخته حل کنید در مورد مثال صفحهٔ 274 بعضی نکات لازم ذیل اند:

B_i: رای دهنده‌گان ولایت B_i را نشان میدهد.

$P(B_i)$: فیصدی رأی دهندگان ولایت B_i

V: رای دهنده‌گان که حزب جمهوری را انتخاب کرده اند.

$P(V)$ فیصدی رأی دهنده‌گان که حزب جمهوری را نشان میدهد.

$P_{B_i}(V)$: احتمال رأی دهنده‌گان ولایت B_i که به حزب جمهوری رأی داده اند.

ارزیابی ختم درس(5) دقیقه

برای اینکه مطمئن شوید که شاگردان درس جدید را فرا گرفته اند یا خیر؟سؤالات ذیل مربوط به درس را از شاگردان بپرسید و کوشش کنید تا جوابات درست را از شاگردان به دست آرید:

1. اصل حاصل ضرب را تعریف کنید؟
2. آیا اصل حاصل ضرب در احتمال مشروط و احتمال حوادث مستقل به‌کار برده می‌شود یا خیر توضیح دهید؟

نوت: جواب سؤالات فوق در معلومات اضافی درس داده شده است.

معلومات اضافی

احتمال اصل حاصل ضرب(*Multiplication theorem of probability*): هرگاه حوادث A و B مربوط فضای نمونهٔ S باشند؛ پس: $P(A\cap B)=P(A)\cdot P_A(B)$

رابطهٔ فوق را اصل حاصل ضرب گویند. این رابطه نشان میدهد که احتمال وقوع همزمان حوادث A و B مساوی است به احتمال حادثهٔ A ضرب در احتمال مشروط حادثهٔ B نظر به حادثهٔ A .

این تیوری از تعریف احتمال مشروط به دست می‌آید. هرگاه فورمول احتمال مشروط را در نظر گیریم؛ پس:

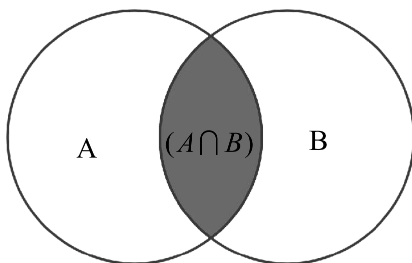
$$P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)} \quad , \quad P(A)\neq 0$$

هرگاه دوطرف مساوات فوق را ضرب $P(A)$ نماییم؛ پس رابطهٔ ذیل به دست می‌آید:

$$P(A\cap B)=P_A(B)\cdot P(A)$$

ما میتوانیم برای حوادث مستقل نیز از اصل حاصل ضرب استفاده نماییم.

چون در حوادث مستقل $P_A(B)=P(B)$ است؛ پس می‌توانیم بنویسیم که: $P(A\cap B)=P(B)\cdot P(A)$



فصل هشتم

عنوان درس: اصل حاصل ضرب

صفحهٔ کتاب (275-276)

وقت: ساعت دوم درسی

اهداف آموزشی **- دانشی** **- مهارتی** **- ذهنیتی**	• شاگردان مفهوم اصل حاصل ضرب را بدانند. • شاگردان در فورمول‌های احتمال مشروط و احتمال حوادث مستقل، اصل حاصل ضرب را نشانی کرده بتوانند. • شاگردان از آوردن مثال‌ها در مورد اصل حاصل ضرب، خط ببرند.
روش های تدریس	سؤال و جواب، کارگروهی و کارانفرادی
مواد ممد درسی	چارت شکل ورودی.
توضیح ورودی (5) دقیقه	در قدم اول کارهای مقدماتی تدریس که بعد از داخل شدن به صنف ضروری است انجام دهید، بعداً به توضیح چارت شکل ورودی اقدام کنید؛ مانند درس اول ورودی، اصل حاصل ضرب را تکرار نمایید.

فعالیت جریان درس(28) دقیقه

تعریف صفحهٔ 275 را با سهم فعال شاگردان توضیح دهید؛ یعنی با استفاده از درس اول، اصل حاصل ضرب به شکل سؤال وجواب فورمول که مربوط تعریف است توضیح دهید.

در ادامهٔ تعریف فورمول بیز(Bay's) موجود است، چون فورمول بیزدر درس ساعت درسی اول(اصل حاصل ضرب) ثبوت شده است اینجا تنها فورمول را روی تخته نوشته و به طریقهٔ سؤال و جواب با شاگردان توضیح کند.

تحکیم درس(7) دقیقه

برای تحکیم درس مثال صفحهٔ 275 را روی تخته نوشته جزء اول مثال را با سهم فعال شاگردان حل و توضیح نمایید و برای حل جزء دوم مثال، یک شاگرد داوطلب را بخواهید تا مثال را روی تخته حل نماید، همزمان از شاگردان دیگر بخواهید تا جز دوم مثال را در کتابچه‌های شان حل نمایند در ختم حل مثال اگر اشتباه وجود داشته باشد آن را اصلاح نمایید و از شاگردان بخواهید تا حل کتابچه‌های شان را با حل روی تخته مقایسه نمایند.

ارزیابی ختم درس(5) دقیقه

برای اینکه مطمئن شوید که شاگردان درس جدید را فرا گرفته اند یا خیر؟سؤالات ذیل را از شاگردان بپرسید:

1. آیا میتوانید فورمول بیز را نوشته و توضیح نمایید؟
2. آیا میتوانید یک مثال را بیاورید که توسط فورمول بیز حل شود؟

معلومات اضافی

اصل حاصل ضرب در احتمال حوادث مستقل هم بکار برده می‌شود اصل حاصل ضرب در احتمال مشروط حوادث طور ذیل است:

$$P(A \cap B) = P_A(B) \cdot P(A)$$

چون در حوادث مستقل $P_A(B) = P(B)$

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A)$$

رابطهٔ فوق اصل حاصل ضرب در حوادث مستقل می‌باشد.

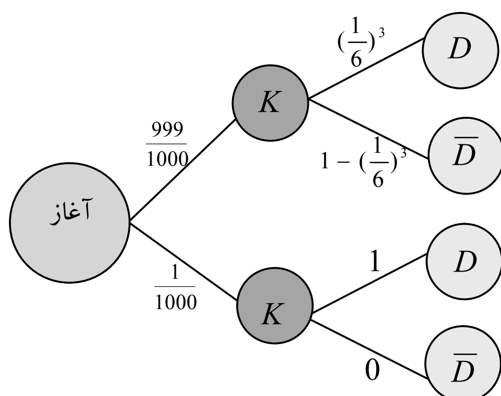
جواب به سؤال های تمرین

در بین 1000 دانه رمل یک دانه بالای هر شش رخ آن خال شش شماره زده شده است. از بین آن ها یکدانه به صورت اتفاقی انتخاب و سه بار انداخته شده هر سه بار 6 می آید احتمال آن که دانه به صورت درست شماره زده شده باشد دریافت کنید.

حل:

k: دانه رمل به صورت درست شماره زده شده باشد.

D: در سه دفعه پرتاب رمل شماره 6 آمده باشد.



$$P_D(K) = \frac{P(K \cap D)}{P(D)}$$

$$= \frac{0.999 \cdot \frac{1}{216}}{0.999 \cdot \frac{1}{216} + \frac{1}{1000}} = 0.82 \ , \quad 82\%$$

فصل هشتم

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

عنوان درس: استقلالیت حوادث اتفاقی

صفحۀ کتاب (277-278)

وقت تدریس(2 ساعت درسی) ساعت اول درسی

اهداف آموزشی **- دانشی** **- مهارتی** **- ذهنیتی**	• شاگردان مفهوم استقلالیت حوادث اتفاقی را بدانند. • شاگردان حوادث اتفاقی مستقل و غیرمستقل را از هم تفکیک کرده بتوانند. • شاگردان به درس حوادث اتفاقی مستقل علاقه‌مندی پیدا نمایند.
روش های تدریس	سؤال و جواب، کارگروهی و کارانفرادی
مواد ممد درسی	یک تعداد مهره‌های دورنگ، قطی
توضیح ورودی **(5) دقیقه**	در قدم اول کارهای مقدماتی تدریس که بعدا از داخل شدن به صنف ضروری است انجام دهید، بعداً به توضیح ورودی اقدام کنید. درس جدید ما(استقلالیت حوادث اتفاقی) به درس قبلی(احتمال مشروط) رابطه دارد؛پس در قدم اول از دروس قبلی سؤال نموده، آنها را به درس جدید ربط دهید و از آنها بپرسید: • آیا میتوانید فورمول که در بخش ورودی داده شده توضیح دهید؟ • مفهوم احتمال مشروط را بیان و فورمول آنرا بنویسید. • حوادث که وقوع آن بالای یک دیگر تأثیر دارد به نام چی یاد می‌شود؟ • حوادث که وقوع آن بالای یک دیگر تأثیر ندارد به نام چی یاد می‌شود؟ کوشش کنید تا جوابات درست را از شاگردان به دست آورید؛ برعلاوۀ آن طوری ذیل توضیحات دهید: فورمول بخش ورودی احتمال حوادث مستقل را نشان میدهد. در فورمول فوق $P(A)$احتمال حادثۀ A و $P(B)$ احتمال حادثۀ B را نشان میدهد. حوادث که وقوع آنها بالای یکی دیگر تاثیر ندارند به نام حوادث مستقل(*Independent event*) یاد می‌شود و حوادث که وقوع آنها بالای یکدیگر تاثیر دارد به نام حوادث غیرمستقل(وابسته)(*Dependent event*) یاد میشود. برای معلومات بیشر به معلومات اضافی درس مراجعه کنید. میتوانید دو سؤال اول را با استفاده از احتمال مشروط وسؤال سوم را بااستفاده از احتمال حوادث مستقل حل نمایید.

فعالیت جریان درس(28) دقیقه

شاگردان را به گروه‌های مناسب تقسیم نموده و به آنها وظیفه دهید تا فعالیت 277 را انجام دهد. در جریان کار

گروهی از گروه‌ها نظارت کنید تا تمام اعضای گروه در اجرای فعالیت سهم فعال داشته باشند. شاگردان را رهنمایی نمایید که فعالیت را با استفاده از درس گذشته انجام دهند. در ختم فعالیت از نمایندهٔ یک گروه را بخواهید تا کار گروهی خویش را به دیگران توضیح دهد. در صورت بروز اشتباه آنها را کمک و رهنمایی نمایید. بعداً نتایج فعالیت را به شاگردان توضیح دهید، طوریکه سطر اول فعالیت با استفاده از احتمال مشروط سطر دوم آن بااستفاده از حوادث مستقل و سطر سوم آن فورمول $P(A\bigcup B)=P(A)+P(B)-P(A\bigcap B)$ می‌باشد. ثبوت آن در معلومات اضافی برای مدرس موجود است؛ بعداً مثال اول صفحهٔ 278 کتاب درسی را با سهم فعال شاگردان روی تخته به شکل سؤال و جواب به شاگردان توضیح دهید.

تحکیم درس(7) دقیقه

برای تحکیم درس حالت عمومی حوادث مستقل که در صفحهٔ 278 کتاب درسی داده شده است با سهم فعال شاگردان توضیح دهید. به ادامهٔ حالت عمومی به توضیح نتیجه اقدام کنید. جزء اول نتیجه را باسهم فعال شاگردان توضیح دهید و جزء دوم آن که در مورد بیشتر از یک حادثهٔ مستقل بحث می‌کند باید یک تن از شاگردان روی تخته توضیح دهد.

ارزیابی ختم درس(5) دقیقه

برای اینکه مطمئن شوید شاگردان درس جدید را فهمیده اند یا خیر؟ سؤالات ذیل را از شاگردان بپرسید و کوشش کنید تا جوابات درست را به دست آورید:

1. حوادث مستقل چی نوع حوادث اند؟
2. آیا میتوانید احتمال حوادث مستقل را محاسبه کنید؟
3. هرگاه داخل یک خریطه 3 مهرهٔ سفید و 2 مهرهٔ سیاه موجود باشند و ما به صورت تصادفی از خریطه یک مهره برداریم، بعد از مشاهدهٔ دوباره آن را در خریطه می‌اندازیم، همین عمل را تکرار می‌کنیم. احتمال اینکه هر دو مهره سفید باشد به دست آرید و بگویید که برای محاسبهٔ این سؤال از احتمال مشروط یا احتمال حوادث مستقل را بکار می‌بریم.

راجع به سؤالات ارزیابی معلومات در معلومات اضافی درس موجود اند میتوانید برای ارزیابی استفاده کنید.

معلومات اضافی

قضیه(*Theorem*): هرگاه A و B مستقل باشند؛ یعنی وقوع یک حادثه بالای حادثهٔ دومی تاثیر نداشته باشد و برعکس؛ پس احتمال وقوع حوادث A و B مساوی است به احتمال حادثهٔ A ضرب در احتمال حادثهٔ B:

$$P(A\bigcap B)=P(A)\cdot P(B)$$

ثبوت(*Proof*): فرض می‌کنیم که حادثهٔ A دارای m حالات ممکنه و m_1 حالات مساعد باشد و حادثهٔ B دارای n حالات ممکنه و n_1 حالات مساعد باشند؛ پس: $P(B)=\frac{n_1}{n} \quad \wedge \quad P(A)=\frac{m_1}{m}$

چون A و B مستقل اند؛ پس برای وقوع حادثهٔ A از m_1 حالات مساعد یک حالت رخ میدهد و هم برای وقوع حادثهٔ B از تعداد n_1 حالات مساعد باید یک حالت رخ دهد؛ پس حالات مساعد حادثهٔ $A\bigcap B$ عبارت از $m_1 \times n_1$ می‌باشد؛ یعنی برای وقوع حادثهٔ $A\bigcap B$ به تعداد $m_1 \times n_1$ حالات مساعد وجود دارد؛ پس:

$$P(A\bigcap B)=\frac{m_1 \times n_1}{m \times n}=\frac{m_1}{m}\cdot\frac{n_1}{n}=P(A)\cdot P(B) \Rightarrow \quad P(A\bigcap B)=P(A)\cdot P(B)$$

هرگاه ما بیشتر از دو حادثه داشته باشیم؛ یعنی در حالت عمومی اگر A_1, A_2 ... A_n به تعداد n حوادث مستقل باشند؛ پس احتمال وقوع همزمان حوادث A_1, A_2 ... و A_n مساوی است به:

$$P(A_1 \bigcap A_2 \bigcap A_3 \bigcap \ \dots \ \bigcap A_n)=P(A_1)\cdot P(A_2) \ \dots \ P(A_n)$$

مثال: هرگاه یک سکه 3 دفعه پرتاب شود فضای نمونهٔ آن طور ذیل است:

$$S=\{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT\}$$

هرگاه A (حادثهٔ آمدن سکه به روی شیر در پرتاب اول) باشد و B (حادثهٔ آمدن سکه به روی خط در پرتاب دوم) باشد، بگویید که حوادث A و B مستقل اند یا خیر؟

حل:

$$A=\{HHH, HTH, HHT, HTT\}$$

$$B=\{HTH, HTT, TTH, TTT\}$$

$$P(A)=\frac{4}{8} \quad \wedge \quad P(B)=\frac{4}{8}$$

$$A\bigcap B=2$$

$$P(A\bigcap B)=\frac{2}{8}=\frac{1}{4} \Rightarrow \quad P(A\bigcap B)=P(A)\cdot P(B)$$

$$\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$$

نوت:
$H=$ شیر
$T=$ خط

پس حوادث A و B مستقل اند.

جواب به سؤال های تمرین

از یک ستی که عناصر آن $2, 3$ ، 5 و 30 است احتمال برگزیدن یک رقم از این ست 0.25 است، به صورت اتفاقی یک رقم را از این ست انتخاب می‌کنیم، هرگاه A_k حادثهٔ اتفاقی رقم برگزیده شده قابل تقسیم بر k باشد آیا حوادث اتفاقی A_2, A_3 و A_5 دو به دو مستقل اند یا خیر؟

حل: میدانیم که:

$$P(A_2)=\frac{1}{2} \qquad P(A_2\cap A_3)=\frac{1}{4} \quad , \quad P(A_2)\cdot P(A_3)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

$$P(A_3)=\frac{1}{2} \qquad \Rightarrow P(A_2\cap A_3)=P(A_2)\cdot P(A_3)$$

$$P(A_5)=\frac{1}{2} \qquad P(A_2\cap A_5)=\frac{1}{4} \quad , \quad P(A_2)\cdot P(A_5)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow P(A_2\cap A_5)=\frac{1}{4}=P(A_2)\cdot P(A_5)$$

:

$$P(A_3\cap A_5)=\frac{1}{4} \qquad P(A_3\cap A_5)=\frac{1}{4} \quad , \quad P(A_3)\cdot P(A_5)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \ P(A_3\cap A_5)=\frac{1}{4}=P(A_3)\cdot P(A_3)$$

پس حوادث A_3, A_2 و A_5 دو به دو مستقل اند.

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

فصل هشتم

عنوان درس: استقلالیت حوادث اتفاقی

صفحهٔ کتاب (278–280)

وقت: ساعت دوم درسی

اهداف آموزشی **- دانشی** **- مهارتی** **- ذهنیتی**	• شاگردان مفهوم استقلالیت حوادث اتفاقی را بدانند. • شاگردان حوادث مستقل و غیرمستقل را از هم تفکیک کرده بتوانند. • شاگردان راجع به حوادث مستقل از زنده‌گی روزمره مثال زنده آورده واحساس خوشی نمایند.
روش های تدریس	سؤال و جواب، کارانفرادی
مواد ممد درسی	یک مقدار مهره‌های دورنگ، یک قطی
توضیح ورودی (5) دقیقه	در قدم اول کارهای مقدماتی تدریس را که بعد از داخل شدن به صنف ضروری است انجام دهید، بعداً ورودی درس قبلی استقلالیت حوادث را تکرار نمایید.

فعالیت جریان درس(28) دقیقه

مثال دوم صفحهٔ 279 کتاب درسی را روی تخته بنویسید. جزء اول مثال را با سهم فعال شاگردان در صنف حل کنید و برای حل جزء دوم مثال، یک شاگرد را بخواهید تا جزء دوم مثال را روی تخته حل کند همزمان از شاگردان دیگر بخواهید تا همین جز را در کتابچه‌های شان حل نمایند در ختم هرگاه در حل مثال روی تخته کدام اشتباه موجود باشد توسط یک شاگرد دیگر تصحیح کنید. هرگاه مطمئن شدید که حل روی تخته دیگر اشتباه ندارد از شاگردان بخواهید تا حل کتابچه‌های شان را با حل روی تخته مقایسه کنند.

تحکیم درس(7) دقیقه

برای تحکیم درس مثال سوم صفحهٔ 280 کتاب درسی را باسهم فعال شاگردان به شکل سؤال و جواب روی تخته حل کنید.

ارزیابی ختم درس(5) دقیقه

برای اینکه مطمئن شوید شاگردان درس جدید را فهمیده اند یا خیر؟ سؤالات ذیل را از شاگردان بپرسید:

1. هرگاه یک قطی دارای دو رنگ(سیاه و سفید) مهره باشد و به ترتیب دو مهره را از قطی برداریم و بعد از دیدن رنگ آنرا دوباره داخل قطی بیندازیم؛ پس آمدن مهرهٔ سیاه یک حادثهٔ مستقل است یا خیر؟

جواب: بلی، به دست آمدن مهرهٔ سیاه یک حادثهٔ مستقل است.

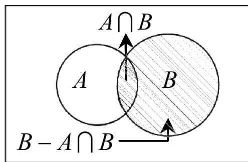
معلومات اضافی

قانون جمع در احتمالات(*Addition law of probability*):

هرگاه حوادث A و B مربوط فضای نمونه S باشند؛ پس: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad \dots \quad I$

رابطهٔ فوق را قانون جمع در احتمالات گویند. این قانون بیان میکند که احتمال وقوع حوادث A و B و یا هردو مساوی است به احتمال حادثهٔ A جمع احتمال حادثهٔ B منفی احتمال حوادث A و B.

ثبوت(*Proof*): برای ثبوت قانون فوق از دیاگرام وین استفاده میکنیم، طوریکه در شکل مقابل مشاهده میکنیم، ست $B-A\cap B$ دارای عناصر است که شامل ست B می‌باشد؛ اما شامل ست A نمی باشد و ست $A\cup B$ از اتحاد دو ست متفاوت A و $(A\cap B)$ به دست می‌آید؛پس:



$$P(A\cup B)=A\cup[B-(A\cap B)]$$

هرگاه احتمال آن در نظر گیریم، داریم که:

$$P(A\cup B)=P\{A\cup(B-A\cap B)\}$$

هرگاه A و $B-(A\cap B)$ دو حوادث مستقل باشند؛ پس نظربه تیوری حاصل جمع دو حادثهٔ مستقل که در درس احتمال مشروط در معلومات اضافی ثبوت شده است، میتوانیم بنویسیم که:

$$P(A\cup B)=P(A)+P[B-(A\cap B)] \;\dots\; (i)$$

برعکس میدانیم که:

$$B=(A\cap B)\cup[B-(A\cap B)]$$

$$P(B)=P(A\cap B)+P[B-(A\cap B)]$$

$$\Rightarrow\quad P[B-(A\cap B)]=P(B)-P(A\cap B) \;\dots\; (ii)$$

هرگاه از رابطهٔ (ii) قیمت‌های $P[B-(A\cap B)]$ را در رابطهٔ (i) وضع کنیم، داریم که:

$$\boxed{P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)}$$

مثال:در یک کتاب ریاضی شاگرد A میتواند 80% سؤالات کتاب را حل نماید و شاگرد B ، 60% سؤالات کتاب مذکور را حل کرده میتواند، هرگاه از کتاب به صورت تصادفی یک سؤال انتخاب گردد چقدر احتمال وجود دارد که شاگرد A یا شاگرد B سؤال را حل کرده بتوانند؟

حل:

$$P(A)=\frac{80}{100}=0.8$$

$$P(B)=\frac{60}{100}=0.60$$

چون حوادث مستقل اند؛ پس $P(A\cap B)=(0.6)(0.8)=0.48$ احتمال اینکه شاگرد A یا B سؤال مذکور را حل کرده بتوانند، به شکل ذیل محاسبه می کنیم:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0.8+0.6-0.48=0.92$$

92% احتمال وجود دارد که شاگرد A یا B سؤال مذکور را حل کرده بتوانند.

فصل هشتم

عنوان درس: نکات مهم فصل

صفحهٔ کتاب 281

وقت تدریس(یک ساعت درسی)

اهداف آموزشی **- دانشی** **- مهارتی** **- ذهنیتی**	• شاگردان مفهوم نکات مهم فصل را بدانند. • شاگردان نکات مهم فصل را توضیح و تشریح کرده بتوانند. • شاگردان با کسب دانش و مهارت فوق احساس خوشی کند.
روش های تدریس	سؤال و جواب، کارانفرادی
مواد ممد درسی	چارت
توضیح ورودی (5) دقیقه	در قدم اول کارهای مقدماتی تدریس را که بعد از داخل شدن به صنف ضروری است انجام دهید، بعداً چارت نکات مهم فصل را روی تخته آویزان نمایید وبه شاگردان اهمیت نکات مهم فصل را واضیح سازید تا در زنده‌گی روزمره از آن استفاده نمایند.

فعالیت جریان درس(28) دقیقه

برای توضیح نکات مهم فصل به ترتیب یک شاگرد را پیش روی صنف بخواهید تا یک نکتهٔ مهم را از روی چارت بخواند، بعداً توضیح دهد، هرگاه در وقت توضیح کدام اشتباه بروز کرد اصلاح‌اش کنید.

تحکیم درس(7) دقیقه

برای تحکیم درس، مشکلات شاگردان را در نکات مهم فصل حل کنید. تا نکات مهم فصل ذهن نشین آنها گردد.

ارزیابی ختم درس(5) دقیقه

برای اینکه مطمئن شوید شاگردان نکات مهم فصل را یاد گرفته اند یا خیر؟ سؤالات ذیل را از شاگردان بپرسید:

1. فضای نمونهٔ گسسته(*Discrete sample space*) و فضای نمونه پیوسته(*continuous sample space*) را تعریف کنید.
2. حوادث هم چانس چی نوع حوادث اند؟
3. چگونه احتمال فضای نمونه پیوسته را محاسبه کرده میتوانیم؟
4. فورمول احتمال مشروط را بگویید.

جواب به سؤال های تمرین

1- کدام یک از فضاهای نمونهٔ زیر پیوسته و کدام یک آنها گسسته است:

الف: تجربهٔ انداختن یک دانه رمل

ب: تجربهٔ انداختن یک سکه

ج: اصابت تیر به یک دایره

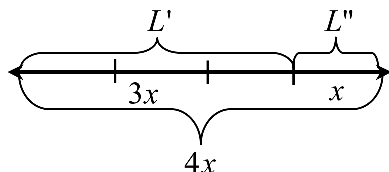
د: تجربهٔ ازدیاد طول یک میلهٔ فلزی نظر به حرارت

حل: جز الف و ب فضای نمونه گسسته را نشان میدهند چون عناصر فضای نمونه قابل شمارش است. دو جز و(ج) و(د) فضای نمونه پیوسته اند؛ چون اندازهٔ ازدیاد طول میله فلزی نظر به ضرورت تعیین نیست، یعنی عناصر فضای نمونه اش قابل اندازه‌گیری نمی باشد.

2- از طول یک چار تراش به طول L به صورت اتفاقی یک برش عرضی انجام می دهیم تا دو قسمت گردد، چقدر احتمال دارد که قسمت بریده شدهٔ طرف چپ کوچکتر از 3 برابر قسمت راست باشد؟

حل: طول چارتراش L است که دو قسمت تقسیم می شود.

A: احتمال اینکه قسمت طرف چپ از 3 چند قسمت راست کم باشد.



$$P(A)=\frac{3x}{4x}=\frac{3}{4}=0.75$$

3- کارگر یک شرکت خصوصی هر روز بین ساعات 8 تا 8:50 در ایستگاه نزدیک منزلش که سرویس های مامورین آن شرکت به اوقات 8:15 ، 8:30 و 8:45 به ایستگاه می رسند. چقدر احتمال دارد که شخص مذکور کمتر از 5 دقیقه منتظر سرویس باشد؟

حل : سؤال مذکور به موضوع(سلسله‌ها زمانی) ربط دارد که در این کتاب شرح داده شده است؛ بناً از حل این سؤال خود داری می نماییم.

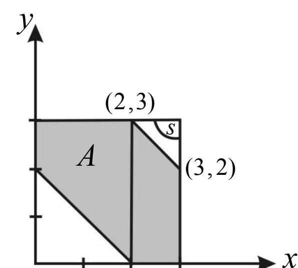
4- به صورت تصادفی انتروال بستهٔ $[0,3]$ دو عدد را انتخاب می نماییم. دریافت کنید احتمال آن که مجموع اعداد کمتر از 5 و بزرگتر از 2 باشد.

حل : فضای نمونه عبارت است از : $S=\{(x,y)\ /\ 0<x<3\ ,\ \ 0<y<3\}$

و حادثه اتفاقی A $\ A=\{(x,y)\ /\ 2<x+y<5\}$

مساحت ذوذنقه A $=(1+3)(\frac{2}{2})+(3+2)\cdot\frac{1}{2}=4+\frac{5}{2}=\frac{13}{2}$

$$\left.\begin{array}{l} n(A)=\frac{13}{2} \\ n(S)=9 \end{array}\right\} \Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{\frac{13}{2}}{9}=\frac{13}{18}$$



5- یک نقطه به صورت تصادفی در داخل مخروط که شعاع قاعدهٔ آن R و ارتفاع آن $R\sqrt{3}$ باشد انتخاب می کنیم. دریافت کنید احتمال آن که نقطه داخل کرهٔ محاط در این مخروط قرار گیرد.

حل :

$$\text{حجم کره} = \frac{4}{3}\pi r^3$$

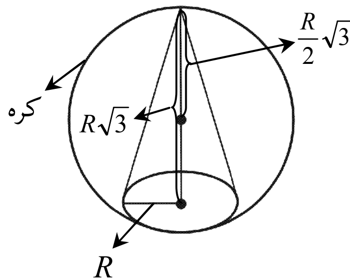
$$= \frac{4}{3}\pi (\frac{R}{2}\sqrt{3})^3 = \frac{4}{3}\pi \frac{R^3}{8}\cdot 3\sqrt{3})$$

$$V = \pi \frac{R^3}{2}\sqrt{3}$$

$$\text{حجم مخروط} = \frac{1}{3}(\text{مساحت قاعده})\times \text{ارتفاع}$$

$$V' = \frac{1}{3}(\pi R^2)\cdot R\sqrt{3} = \frac{1}{3}\pi R^3\sqrt{3}$$

A: احتمال اینکه نقطه در مخروط باشد.



$$P(A) = \frac{V'}{V} = \frac{\frac{1}{3}\pi R^3\sqrt{3}}{\pi \frac{R^3}{2}\sqrt{3}}$$

$$P(A) = \frac{1}{6} = 0.1\overline{6}$$

6- خراب بودن یک قلم خود کار می تواند دو دلیل داشته باشد:

a) خرابی میخانیکیت

b) خرابی نیچه خودکار

هرگاه احتمال آن که یک قلم خودکار خراب باشد 0.088 و احتمال علت خرابی دلیل شماره 1 باشد مساوی به 0.05 و برای دومین نقص قیمت احتمال مساوی به 0.002 باشد مطالعه کنید، آیا دو دلیل بالا با هم حوادث مستقل و یا غیر مستقل می باشند؟

حل: هردو حوادث اتفاقی غیر مستقل یا وابسته اند؛ زیرا خراب شدن نیچه شامل خراب شدن میخانیکیت قلم می شود.

A: دلیل خراب شدن قلم جز a باشد.

B : دلیل خراب شدن قلم جز b باشد.

$$\left.\begin{array}{l} P(A) = 0.05 \\ P(B) = 0.02 \\ P(A\cap B) = 0.08 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad P(A\cap B) \neq P(A)\cdot P(B)$$

پس حوادث A و B مستقل نمی باشند.

7- خبیر می خواهد قفل خانه را باکلیدی که با چهار کلید همسان در جیبش موجود است باز کند. با کدام احتمال بعد از امتحان سوم، کلیدی که از جیبش می گیرد کلید قفل خواهد بود در صورتی که:

a) کلید های امتحان شده را تحت شرطی که کلید اصلی نباشد دوباره به همان جیب خود می گذارد.

b) کلید های امتحان شده را تحت شرطی که کلید اصلی نباشد در جیب دیگر خود می گذارد.

حل: تعداد کلید ها 4 است.

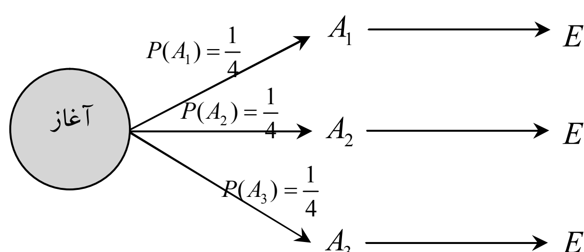
A_1 : دفعهٔ اول گرفتن کلید

A_2 : دفعهٔ دوم گرفتن کلید

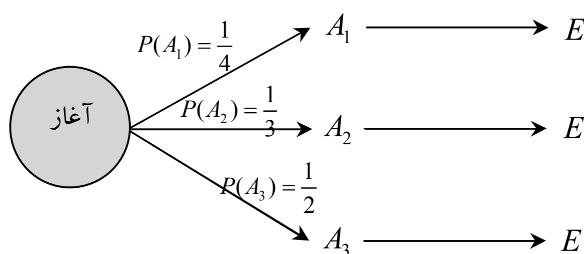
A_3: دفعهٔ سوم گرفتن کلید

E : کلید گرفته شده اصلی نباشد.

$$P_{A_1}(E)=\frac{P(E\cap A_1)}{P(A_1)}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}}=1 \qquad (a$$



b) کلید دوباره در جیب گذاشته شود.



$P_{A_1}(E)=\frac{1}{4}=$ چون کلید اول اصلی نبود دوباره درجیب دیگر گذاشته شود.

$P_{A_2}(E)=\frac{1}{3}=$ چون کلید دوم اصلی نبود دوباره درجیب گذاشته شود.